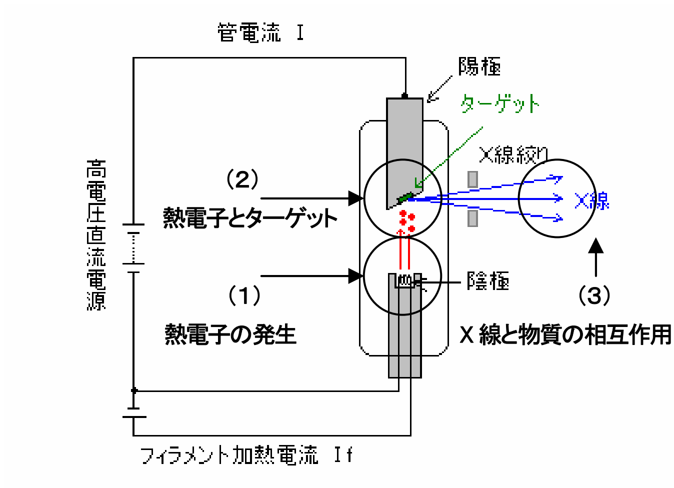
機器計算問題集

1.　X 線管と X 線の発生



(1) X 線管の中での熱電子の運動エネルギー

$E = e \cdot V$ [eV]　　e : 1.602×10^{-19}[C]　v : 加速電圧

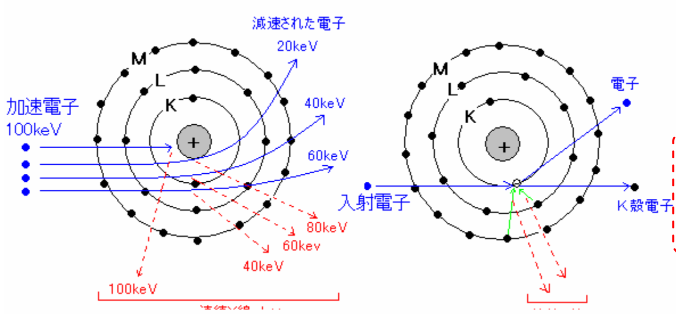
また, [eV] と [J] の換算は,

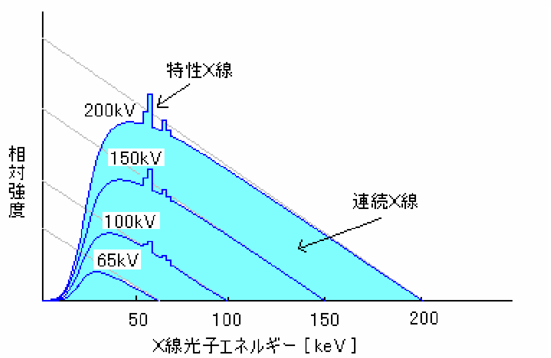
$$\frac{1}{2}mv^2 = 1[eV] = 1.6 \times 10^{-19}[J]$$

$$1[N \cdot m] = 1[J] = 10^7[erg] = 0.238[cal]$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m{v_1}^2 - m{v_2}^2) = \frac{1}{2}m({v_1}^2 - {v_2}^2)$$

(2) X 線の発生(ターゲット金属の中での現象)





《連続 X 線》

ターゲット金属(W)より発生する連続 X 線の最短波長

(Duane–Hunt の法則)

$$\lambda_0 = \frac{12.42}{V} \times 10^{-10} [m]$$

最短波長は加速電圧（管電圧）に反比例する。つまり、電圧が高くなると波長が短く（エネルギーが強く）なる。

【問題】加速電圧が 100kV のときの最短波長は

$$\lambda_0 = \frac{12.4}{100} \times 10^{-10} = 0.124 \times 10^{-10} = 1.24 \times 10^{-1}[A]$$

【問題】加速電圧が 80kV のときの最短波長は

$$\lambda_0 = \frac{12.4}{80} \times 10^{-10} = 0.124 \times 10^{-10} = 1.55 \times 10^{-11}[m]$$

連続 X 線の強度　W

発生するX線の 1 秒当たりの総エネルギー(X 線強度)

$$W = K \cdot I \cdot V^2 \cdot Z$$　　K : 定数　1.1×10^{-6}

発生する X 線の強さは, ターゲット金属の原子番号と加速電圧（2 乗）に比例

X 線発生効率　η

1 秒当たりに発生するX線の総エネルギーWと消費される電子エネルギー(電力=V×I)との比

$$\eta = \frac{KIV^2Z}{IV} = KVZ$$　　K : 定数　1.1×10^{-6}

【問題】衝突物質がタングステン(W:原子番号 74)で加速電圧Vが 100kV のときのX線発生効率 η は

$$\eta = kVZ = 1.1 \times 10^{-6} \times 100 \times 74 \times 100 = 0.814\ [\%]$$

重要☞　X線発生効率 η は約 0.8%にすぎず, 残りのほとんどのエネルギーは熱損失となりターゲットを加熱する.

《特性 X 線》

特性X線のエネルギー　E

$$E = W_1 - W_2 = h \cdot \nu \ [\text{eV}]$$

特性X線の振動数 ν と物質の原子番号Zの関係

(Moseley の法則)

$$\sqrt{\nu} = K(Z - \sigma) \ \Rightarrow\ \nu = [k(Z - \sigma)]^2$$　　k, σ は定数

X線の性質

X 線は**電磁波(波)**であり**粒子**である. **(X 線の二面性)**

① 電磁波

X線は電磁波の一種であるため波として空間を伝わり，その伝播速度は一定である. 波長を λ [m]、振動数を ν [s^{-1}]とすると，次の関係式が成り立つ.

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

c:光速 3×10^{8}[m/s]

振動数 ν が大きくなると波長 λ は短くなる．つまり，エネルギーは強くなる．

② 粒子

X線は粒子としての性質も持つ. このような粒子を ***光子(photon)*** といい，光子エネルギーは ***振動数 ν*** に比例する.

波動説 と ***粒子説*** をまとめた式は

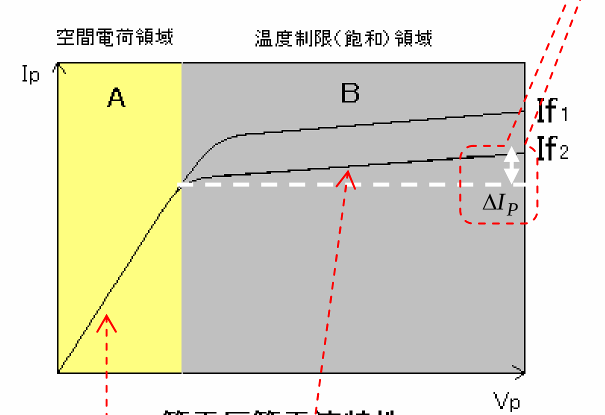
$$E = h\cdot\nu = h\cdot\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{[eV] または [J]}$$

h: プランク定数 6.625×10^{-34}[Js]

プランク定数は量子力学の基本単位

☞ 重要:プランク定数が入る式は粒子を表す. また $\lambda = \frac{c}{\nu}$ は，波を表す.

X 線管の Vp－Ip(管電圧－管電流)特性



管電圧管電流特性

X 線管の整流作用

二極真空管では陽極を陰極に対して正電位にしたとき，熱電子が陽極に到達して陽極電流が流れるが，電圧を逆極性に加えたときには(①)ため陽極電流は流れない. この性質を(②)といい，二極真空管に限らず一般の真空管においても重要な性質である.

空間電荷電流 と 飽和電流

焦点が小さく，管電圧が低く，管電流が大きいほど(③)で動作し，管電圧の変化に対して管電流は(④)する.

焦点が大きく，管電圧が高く，管電流が小さいほど(⑤)で動作するが，管電圧の変化に対して管電流は(⑥)しない.

飽和領域で管電流が若干上昇する理由は

(⑦)効果による.

重要 ☞ 管電流(エミッション)特性

横軸に(⑧)，縦軸に(⑨)をとり，(⑩)をパラメータとして表した曲線.

重要 ☞ フィラメント特性

(⑪)に対する(⑫)の関係を表した曲線. X 線管の場合，5～15V，3～5.5A 程度.

① 熱電子は陽極に到達できない
② 整流作用
③ 空間電荷電流
④ 大きく変化
⑤ 飽和電流
⑥ ほとんど変化
⑦ ***ショットキー効果***:電界強度の増大による仕事関数の減少
⑧ フィラメント電流
⑨ 管電流
⑩ 管電圧
⑪ フィラメント電流
⑫ フィラメント電圧

【 Langmuir–Child の式 】

空間電荷制限領域で流れる電子流(管電流)を**空間電荷電流**といい，空間電荷電流 Ip [A] と 印加電圧 Vp [V] の間には次式が成立する.

$$I_p = K\left(\frac{V_p^{\frac{3}{2}}}{d^2}\right)$$

K: 定数 d: 電極間距離[m]

管電流量は，電極間距離の二乗に半比例し，電圧の(3/2)乗に比例する．つまり，陰極と陽極の距離が開けば管電流量は指数関数的に減少する．電極間距離は 17～18 ㎜

【 Richardson–Dushman の式 】

フィラメント金属の単位表面積から放射される飽和電子流 I [A/cm^2] と 絶対温度T [K]の関係は次式で与えられる.

$$i = A\cdot T^2 \cdot e^{-\frac{\phi}{kT}}$$

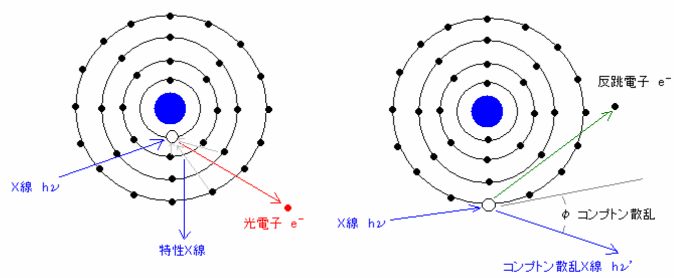
A: 熱電子放出定数 (120.4A/(cm^2・K^2)

K: ボルツマン定数 (1.38×10^{-23} J/K)

☞ 飽和電流は***フィラメントの形状(A)と温度***で変化する.

(3) X線と物質の相互作用

X線が物質内に入射すると，X線は物質と相互作用を起こし減弱する． その相互作用は***光電効果*，*コンプトン効果(散乱)*，*電子対生成***などによって行なわれる． 電子対生成はX線光子エネルギーが ***1.02 [MeV]以上***のときに起こるので診断領域では無視できる．



光電効果　　　　　　コンプトン効果

光電効果が生じる確立

$$\tau = K\left(\frac{Z^3}{E^3}\right)[\mathrm{cm^2/g}] \qquad \mathrm{k}:\text{定数}$$

☞ **重要**

光電効果が生じる確立は，入射物質の原子番号が高く，エネルギーが低いほど光電効果の確率は高くなる．

半価層の求め方 ☞ **重要だから必ず覚えること！放射線物理，計測学でも出題されるよ．**

透過X線強度(光子量)が，入射したX線の 1/2 となるときの厚みX [mm]を半価層という．したがって，以下の式より半価層が導かれる． $\log_e 2 \cong 0.693$ とする．

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\mu x}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\mu x}$$

ここで両辺の対数をとり

$$\log\frac{1}{2} = \log e^{-\mu x}$$

$$\log 2^{-1} = \log e^{-\mu x}$$

$$-\log_e 2 = -\mu x$$

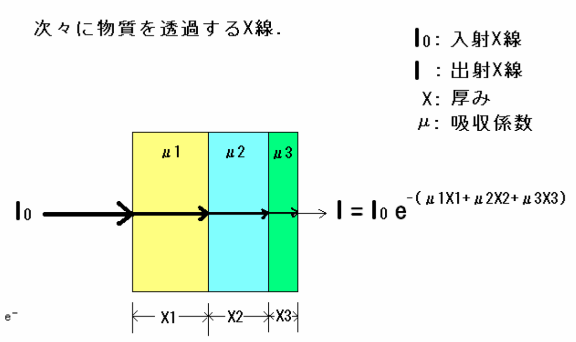
$$0.693 = \mu x$$

$$\therefore \quad x = \frac{0.693}{\mu}$$

☞ **X線減弱式の意味(指数の掛け算は足し算)**

物質を次々に透過する透過 X 線の強度は最終的に出てくるときには，指数部分(それぞれの物質の厚み及び減弱係数の積)の和となる．

$$I_1 = I_0 \cdot e^{-\mu_1 x_1}$$



$$I_2 = I_1 \cdot e^{-\mu_2 x_2}$$
$$= I_0 \cdot e^{-\mu_1 x_1} \cdot e^{-\mu_2 x_2}$$
$$= I_0 \cdot e^{-\mu_1 x_1 + (-\mu_2 x_2)}$$
$$= I_0 \cdot e^{-\mu_1 x_1 - \mu_2 x_2}$$

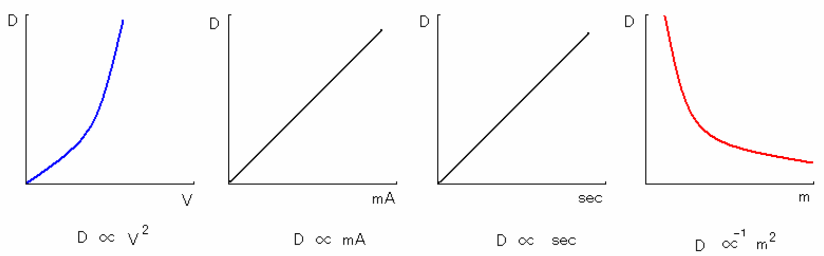
$$I_3 = I_2 \cdot e^{-\mu_3 x_3}$$
$$= I_0 \cdot e^{-\mu_1 x_1 - \mu_2 x_2} \cdot e^{-\mu_3 x_3}$$
$$= I_0 \cdot e^{-\mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 + (-\mu_3 x_3)}$$
$$= I_0 \cdot e^{-\mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 - \mu_3 x_3}$$

写真効果：Photo graphic effect (PE)

$$PE \propto \frac{V^n \cdot I \cdot t}{d^2}$$

ここで V ：管電圧　n ： 管電圧指数 (n = 2～6)　I ：管電流
t ：撮影時間　d ：撮影距離

☞ 写真効果は撮影***管電圧***と撮影***距離***により大きく変化する．



撮像パラメータと線量・線質

【 撮影パラメータと線量、線質の関係 】

撮影パラメータ	表示値	画質に与える影響
管電圧 V	ピーク値 [kV]	線量、線質に対してｎ乗の関係
管電流 mA	平均値 [mA]	線量に対して正比例の関係
撮影時間 s	秒 [s]	線量に対して正比例の関係
撮影距離 m	メートル [m]	線量に対して逆２乗の関係

【問題】　写真効果
充電電圧 60kＶで，撮影距離 1m，10mAs 放電と，撮影距離 2m で 40mAs 放電では写真効果は等しいか.

$$\frac{60^n \cdot 10}{1^2} : \frac{60^n \cdot 40}{2^2}$$ となり，同じとなる.

回転陽極の回転数 P30
陽極の回転は，ターゲット円板に直結された銅製の回転子と外部の固定子からなり，誘導電動機の原理により固定子から回転磁界が与えられ，回転子は次の速度で回転している.

$$N = \frac{120f}{P}(1-S)\,[rpm]$$

f:電源周波数(50Hz or 60Hz)　P：磁極の数(通常 2 極)　S:滑り(約 0.1)

注意 ☞　三倍高速回転陽極では電源周波数を 3 倍にする.

【問題】 大分大学医学部で使用されている一般撮影用回転陽極 X 線管の回転数を求めよ. ただし，電源周波数は 60Hz，普通回転陽極 X 線管であり固定子の極数は2極とする.

$$N = \frac{120 \cdot 60}{2}(1-0.1) = 3{,}240\,[rpm]$$

回転陽極 X 線管の比負荷
0.1 秒以下の短時間負荷では次の関係式がある.

$$W = k \cdot \frac{l\sqrt{a \cdot d \cdot n}}{\sin\theta} \cong k \cdot \sqrt{d \cdot n} \quad [\mathrm{W/mm^2}]$$

W:最大入力　l:実効焦点の長さ　K:定数　θ:ターゲット角
a:実効焦点幅　d:焦点軌道直径　n:陽極回転数

【問題】 陽極回転数が3倍上がれば許容負荷は何倍上がるか.

$k \cdot \sqrt{d \cdot n} : k \cdot \sqrt{d \cdot 3n}$　より

3倍高速 X 線管では $\sqrt{3}$ 倍＝1.7 倍.

【問題】 陽極の軌道が2倍上がれば許容負荷は何倍上がるか.

$\sqrt{2} = 1.41$ 倍となる.

問題 11　回転陽極 X 線管で 0.1 秒以下の負荷において，陽極回転数を 3 倍，焦点軌道直径を 1.3 倍にすると短時間許容負荷は約何倍か.
1. 1.7　　*2. 2.0*　　3. 2.3　　4. 3.0　　5. 4.0

$W = k\sqrt{n \cdot d} = k\sqrt{3n \cdot 1.3d}$ より　$\sqrt{3.9} = 1.97 \cong 2$

X 線管入力(kW)
X 線管入力(陽極入力)とは，X 線を発生させるために陽極に加えられる電力（ P＝IV [kW]).

$$P = U \times I \times f \times 10^{-3}[kW]$$

P:X 線管入力 [kW]
U:管電圧 [kV] ピーク値
I:管電流 [mA] 平均値
f:管電圧のリプル百分率で決まる定数
☞ ピーク値と平均値を実効値に換算する係数.

f ＝1.0　：　リプル百分率が 10%以内
（インバータ式，定電圧形，三相 12 ピーク形に相当）

f ＝0.95　：　リプル百分率が 10%を超え 25%以内
（三相 6 ピーク形に相当）

f ＝0.74
（単相 2 ピーク，単相1ピーク形に相当）

ヒートユニット(HU)
HU とは，X 線管の入力を表す特別な単位. 陽極蓄積熱量などを表す.

☞ HU＝0.71[J] として換算する.

（1） 単相全波整流回路，単相半波整流回路，自己整流回路

$$HU = U \times I \times t \qquad HU/\sec = U \times I$$

（2） 三相全波整流回路または同等のリプル百分率回路

$$HU = U \times I \times t \times 1.35 \qquad HU/\sec = U \times I \times 1.35$$

（3） 定電圧回路

$$HU = U \times I \times t \times 1.41 \qquad HU/\sec = U \times I \times 1.41$$

（4） コンデンサ式

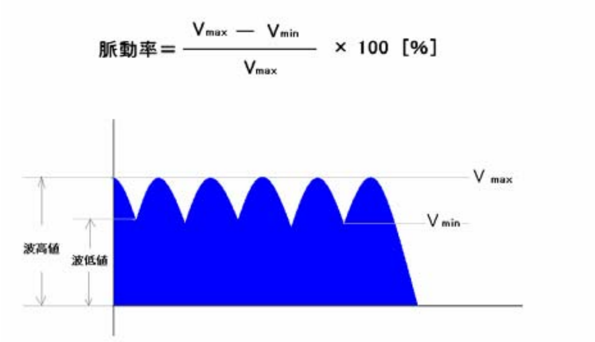
$$HU = 0.71 \times C \times (U_1{}^2 - U_2{}^2)$$

U:管電圧 [kV]　ピーク値で表す
I:管電流 [mA]　平均値で表す
t:負荷時間 [s]
C:コンデンサ容量 [μF]
U_1,U_2:放電開始時と放電終了時の管電圧

脈波別脈動率

脈波種類	脈動率
単相半波・単相全波	100 %
3 相 6 ピーク	13.4 %
3 相 12 ピーク	3.4 %
インバータ式装置	1～3 %

色付きはJISによるリプル4%以下の定電圧装置



X 線管許容入力(電力)

問題 26

回転陽極X線管において短時間負荷が 100kV，400mAのとき，X線管入力は約何kWか．ただし，X線高電圧装置の管電圧リプル百分率は 30%とする．

$$100\times10^{3}\times400\times10^{-3}\times0.74 = 29.600 \cong 30[kW]$$

問題 9　管電圧 100kＶ，管電流 800ｍＡ，撮影時間 0.1sec，管電圧リプル百分率 30%のインバータ式 X 線高電圧装置がある．この装置の公称最大電力[kW]はどれか．

1. 46.5　*2. 59.2*　3. 65.7　4. 70.2　5. 89.7

$$100\times800\times0.74 = 59{,}200 = 59\,[kW]$$

問題 9　6 ピーク形 X 線高電圧装置を用いて 100kＶ，400ｍＡ，0.1sec で撮影した．X 線管の陽極に加えられる電力（陽極入力[kW]）はどれか．

1. 3.8　2. 4.8　3. 5.4　*4. 38*　5. 40

$$100\times400\times0.95 = 38{,}000 = 38\,[kW]$$

問題 15 回転陽極 X 線管において短時間負荷が 0.1 秒，100kV，400mA のときエックス線管入力は約何 kW か．ただし，X 線高電圧装置の管電圧のリプル百分率は 30%とする．

1. 30　2. 38　3. 40　4. 54　5. 56

$$100\times400\div0.74 = 29{,}600 \cong 30\,[kW]$$

ヒートユニット(HU)

問題 23 P265

単相2ピーク形装置で 120kV，500mA，0.02sの条件で 20 回連続撮影をしたい．X線管の熱容量は少なくとも何HUのものが必要か．ただし，その冷却効果は無視する．

$$120\times10^{3}\times500\times10^{-3}\times0.02\times f(1)\times20 = 24{,}000[HU] = 24[KHU]$$

問題 24

単相2ピーク形装置で，最大冷却率 240[HU/s]のX線管がある．このX線管で 80kV，300mA，0.1sの条件で反復負荷を行う場合の最短使用間隔を求めよ．また，毎分の使用頻度数は何回か．

$$\frac{80\times10^{3}\times300\times10^{-3}\times0.1\times f(1)}{240} = 10[s]$$

$$\frac{60\,[s]}{10\,[s]} = 6 \text{ 回}$$

問題 25 **第 47 回国試問題**

3相全波整流装置を用いて 100kV，200mA，0.1sの条件で撮影を行う場合，連続して許される最大撮影回数は何回か．ただし，使用するX線管の陽極蓄積熱容量は 100×10^{3}HUとする．

$$\frac{100\times10^{3}}{100\times10^{3}\times200\times10^{-3}\times0.1\times1.35} \cong 37.03$$

従って　37 回

変圧器容量

問題 10　管電圧 150kＶ，管電流 300ｍＡ，撮影時間 1s 通電したとき，単相全波整流装置の高電圧変圧器の最大出力は何 kVA か．

1. 35　2. 40　3. 45　4. 50　5. 55

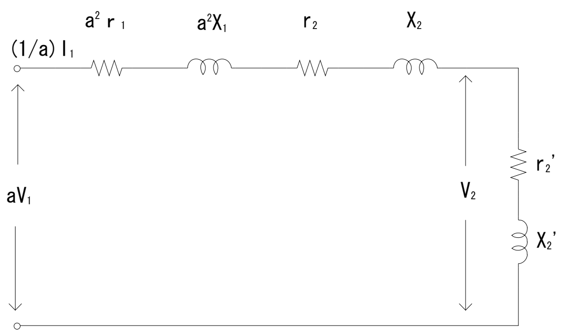
$$\frac{150}{1.41}\times300\times1.11 = 35{,}425 \cong 35\,[kVA]$$

変圧器（２次側換算等価回路）

一次側を全て二次側に置き換えて，等価回路としたもの．

$$Z=\frac{V_2}{I_2}\quad より\quad \frac{a\cdot V_2}{1/a\cdot I}=a^2\cdot Z$$

簡易等価回路として励磁アドミッタンスY_0を無視して二次側に換算すると図２のようになる．



一次側を二次側に換算した場合，一次側の抵抗r_1 およびリアクタンスX_1 は　a^2倍，電圧V_1はａ倍，電流I_1は 1/a倍となるので

$$r_2'=a^2\cdot r_1+r_2\quad\cdots\ ①$$

$$X_2'=a^2\cdot X_1+X_2$$

$$I_2=\left(\frac{1}{a}\right)\cdot I_1$$

の関係より，二次側電圧V_2は

$$V_2=a\cdot V_1-(r_2'+jX_2')I_2$$

で表される．

☞　Ｘ線管の場合は，一次側と二次側の換算（実効値に直す）に注意する．

変圧器等価回路計算

国試問題　第47回

一次側抵抗ｒ1=0.２Ω，二次側抵抗ｒ2=25ｋΩ，巻線比 n2/n1=500 の変圧器がある．二次側等価抵抗は何ｋΩか．ただし漏洩リアクタンス，励磁アドミタンスは無視する．

①式より

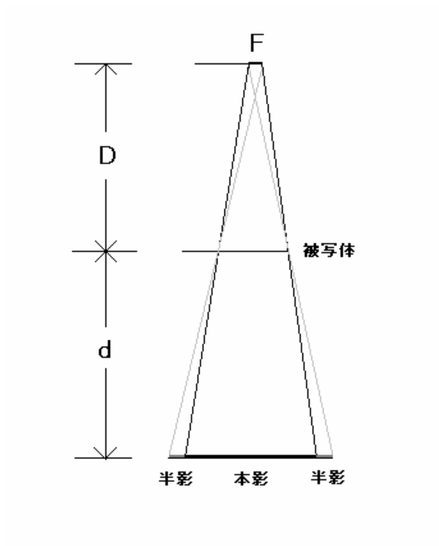
$$r_2'=a^2\cdot r_1+r_2$$

$=500^2\times0.2+25\times10^3$

$=75\times10^3[\Omega]$

$=75[k\Omega]$

拡大率(M) と 半影Ｈ を求める式を導け.



【 拡大率:M 】

$$M=(D+d)/D=1+\frac{H}{F}\quad\cdots\ ①$$

【 半影:H 】

$$H=(M-1)F\quad\cdots\ ②$$

M:拡大率

H:半影の大きさ。0.2mm 以上でぼける。

F:焦点の大きさ

問題 49 エックス線撮影において，幾何学的不鮮鋭度である半影を表す式はどれか．ただし，F は焦点サイズ，I は被写体焦点間距離，m は被写体フィルム間距離とする．

1. I×m×F
2. （m／I）×F
3. *（I／m）×F*
4. （m／I）×（1/F）
5. （I／m）×（1/F）

$$H=(M-1)F=\left[\left(\frac{I+m}{m}\right)-1\right]\times F=[(\frac{I}{m})+\frac{m}{m}-1]\times F=\frac{I}{m}\times F$$

問題 50　0.1mm の焦点サイズを用いて拡大撮影を行う場合、ボケの許容を 0.2mm までとすると最大拡大率の限度は何倍か。

1. 2　　*2. 3*　　*3. 4*　　4. 5　　5. 6

教科書 P52　下から 3 行目

問題 66. 拡大撮影で 50μm のエックス線管焦点を使用した場合、ボケの許容を 0.2mm までとすると最大拡大率は何倍が限度か。

1.　3 倍　2.　4 倍　*3.　5 倍*　4.　6 倍　5.　8 倍

教科書 P52　下から 3 行目

変圧器一次側，二次側，電圧・電流計算

問題　無負荷時において一次電圧 150V で管電圧 100kＶを発生する単相２ピーク形Ｘ線装置がある．この装置で管電流 500mＡを通電したときの一次電流を求めよ．

$$I_1 = \frac{V_2}{V_1} \times I_2 = \frac{\frac{100}{1.41} \times 10^3}{150} \times 500 \times 10^{-3} \times 1.11 \cong 262\,[A]$$

問題　巻線比　a　= 500 の単相２ピーク形Ｘ線装置がある．管電圧 150kＶ，管電流 500mＡ負荷時の一次電圧，一次電流を求めよ．

$$a = \frac{n_2}{n_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2}$$　を利用する

$\frac{V_2}{V_1} = 500$ より

$$V_1 = \frac{V_2}{500} = \frac{\frac{150}{1.41} \times 10^3}{500} = 212\,[V]$$

$\frac{I_1}{I_2} = 500$ より

$$I_1 = I_2 \times 500 = 500 \times 10^{-3} \times 1.11 \times 500 \cong 278\,[mA]$$

平成 15 年（第 55 回）

問題 14　無負荷時において，1 次電圧 200V で管電圧 140kV を発生する単層２ピーク形Ｘ線高電圧発生装置がある．この装置で，１次電流が 100A のときの管電流は何 mA か．ただし，励磁電流は無視する．

1．140　　2．160　　*3．180*　　4．200　　5．220

$(I_2 \times 1.11) \times (\frac{V_2}{1.41}) = I_1 \times V_1$　より

$$I_2 = \frac{\frac{I_1 \times V_1}{(\frac{V_2}{1.41})}}{1.11} = \frac{\frac{100 \times 200}{(\frac{140}{1.41})}}{1.11} \cong 181.6$$

平成 12 年（第 52 回）

問題 14.　無負荷時において 1 次電圧 200V で管電圧 150kV を発生する単相２ピーク形Ｘ線高電圧装置がある．この装置で管電流 200mA 通電したときの 1 次電流は約何Ａか．ただし，励磁電流は無視する．

1．106　　*2．118*　　3．150　　4．166　　5．212

$(I_2 \times 1.11) \times (\frac{V_2}{1.41}) = I_1 \times V_1$　より

$$I_1 = \frac{I_2 \times 1.11 \times \frac{V_2}{1.41}}{V_1}$$

$$I_1 = \frac{200 \times 10^{-3} \times 1.11 \times \frac{150 \times 10^3}{1.41}}{200} = 118\,[A]$$

平成 11 年（第 51 回）

問題 11　巻線比 n_2/n_1=500 の単相２ピークX線高電圧装置がある．一次電圧 150Vのときの無負荷X線管電圧は約何kVか．

1．75　　2．83　　3．91　　*4．106*　　5．150

$\frac{V_2}{V_1} = 500$ より　　$\frac{(\frac{V_2}{1.41})}{V_1} = 500$

$$V_2 = 500 \times 150 \times 1.41 =\cong 106\,[kV]$$

平成 10 年（第 50 回）

問題 12.　１次電圧 200V で管電圧 125kV を発生する単相全波整流装置がある（無負荷時）．管電流 500mA 通電したときの１次電流は約何Ａか．

1．111　　2．221　　*3．245*　　4．313　　5．347

$$I_1 = \frac{I_2 \times 1.11 \times \frac{V_2}{1.41}}{V_1}$$

$$I_1 = \frac{500 \times 10^{-3} \times 1.11 \times \frac{125 \times 10^3}{1.41}}{200} =\cong 246\,[A]$$

平成 8 年（第 48 回）

問題 13.　巻線比 530 の単相全波整流高電圧装置で管電流 400mA 負荷時の１次電流は何Ａか．ただし，励磁電流は無視する．

1．212　　*2．235*　　3．1,325　　4．2,120　　5．2,350

$\frac{I_1}{I_2} = 530$

$$I_1 = 530 \times 400 \times 10^{-3} \times 1.11 \cong 235$$

問題　三相６ピーク形（Δ―Y・Y）装置がある．１脚あたりの巻線比 n_2/n_1 = a = 136，無負荷時整流出力電圧（波高値）100kＶのときの一次電圧はいくらか．（教科書P268）

$$V_1 = \boxed{\frac{100 \times 10^3}{\sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times 136}} = 150\,[V]$$

問題　三相 12 ピーク形（Δ―Y・Δ）装置で一次電圧 152.5V，１脚あたりの巻線比 300 とすれば，無負荷時整流出力電圧（波高値）はいくらか．

$$V_2 = \boxed{\sqrt{2} \times 1.932 \times 300 \times 152.5} = 125\,[kV]$$

コンデンサ式Ｘ線装置

整流方式		整流器	管電圧	脈動率	陽極入力	正負電圧波形
6ピーク	Δ−Y	6	$\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times e \times a$	13.4	$P = 3/\pi \times VA$	非対称
	Δ−YY	12	$2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times e \times a$	13.4	$P = 3/\pi \times VA$	対称
12ピーク	Δ−YΔ	12	$\sqrt{2} \times 1.932 \times e \times a$	3.4	$P \cong VA$	非対称
	Δ−YΔYΔ	24	$2 \times \sqrt{2} \times 1.932 \times e \times a$	3.4	$P \cong VA$	対称

平成 13 年（第 53 回）

問題 16　容量 0.5μF のコンデンサ式 X 線装置において充電電圧 90kV で 15mAs 放電したときの波尾切断電圧は何 kV か.

1. 30　2. 45　*3. 60*　4. 75　5. 80

$$15 = 0.5 \times (90 - x) = 45 - 0.5x$$
$$0.5x = 30$$
$$x = 60$$

平成 9 年（第 49 回）

問題 11. コンデンサ式エックス線装置で 80kV, 10mAs の撮影を行った. 撮影終了時に管電圧計が 70kV を示していた.　この装置に用いられている高圧コンデンサの容量はどれか.

1. 0.5μF　*2. 1.0μF*　3. 1.5μF　4. 2.0μF　5. 2.5μF

$$10 = x(80 - 70) = 10x$$
$$x = 1$$

問題　静電容量 1 μF のコンデンサ式 X 線装置について, 充電電圧 100k V で 50mAs 放電した. 放電時間はいくらか. ただし, 放電開始時の管電流は 500mA. X 線管は単純な抵抗とし, log2=0.7 とする.（教科書 P269）

$$t = CR\ln(\frac{V_0}{V}) = (\frac{100 \times 10^3}{0.5}) \times 1 \times 10^{-6} \times \ln(\frac{100}{50}) = 0.14\,[\mathrm{sec}]$$

問題 23　スライス厚 5㎜, ガントリー1 回転ごとのテーブル移動 10㎜ で撮像するヘリカル CT のピッチはどれか.

1. 0.2　2. 0.5　*3. 2*　4. 5　5. 20

$$HP = \frac{10mm}{5mm} = 2$$

問題 23 シングルスライス CT によりヘリカルピッチ 1.6 で撮影する場合, 撮影できる範囲は何 mm か. ただし, 公称スライス厚は 5mm, 管球が 1 回転するには 0.5 秒かかり, 撮影時間は 20 秒間とする.

1. 160　2. 220　3. 260　*4. 320*　5. 360

$$x = 1.6 \times 5 \times 40 = 320\,[mm]$$

問題 26 エックス線 CT 装置において有効視野が 40cm で画素数が 512×512 のとき, CT 画像の 1 画素の一辺の長さは約何 ㎜ か.

1. 0.1　2. 0.3　*3. 0.8*　4. 1.3　5. 1.8

$$1\ pixcell = \frac{400mm}{512} = 0.78 \cong 0.8\,[mm]$$

平成 14 年（第 54 回）

問題 21　マトリックス数 1,000×1,000, 階調数 16 ビットの画像のデータ量は何メガバイトか.

1. 0.1　2. 0.2　3. 1　*4. 2*　5. 16

$$\frac{1000 \times 1000 \times 16}{8} = 2{,}000{,}000 = 2\,[M\ \ byte]$$

【例題】 [1]Hの磁気回転比がγ＝42.6[MHz/T]とすると，磁場の強さB_0が 0.5[T]，1.0[T]，1.5[T]のときの共鳴周波数はそれぞれいくらか．

$$\omega = \gamma \cdot B_0 \qquad 2\pi \cdot f = \gamma \cdot B_0 \qquad f = \frac{\gamma \cdot B_0}{2\pi}$$

$$\gamma \cdot B_0 = 42.6\,[MHz/T] \times 0.5\,[T] = 21.3\,[MHz]$$

$$\gamma \cdot B_0 = 42.6\,[MHz/T] \times 1.0\,[T] = 42.6\,[MHz]$$

$$\gamma \cdot B_0 = 42.6\,[MHz/T] \times 0.5\,[T] = 63.9\,[MHz]$$

【例題】 MRI での撮像時間を求めよ．

撮像時間（T）を求める式．

$$T = TR \times mat \times NEX$$

TR ：繰り返し時間

mat ：位相方向のマトリックス数

NEX ：信号加算回数

☞ 重要

加算回数をＮ回加算すれば，撮像時間はＮ倍長くなるが，信号強度は$\sqrt{N}$倍となる．

$$SNR = Boxcell \times \sqrt{\frac{NEX}{BW}}$$

NEX：加算回数　　BW：バンド幅

バンド幅が変わっても信号量は変わらないが，白色雑音が変化する．

超音波診断装置

【例題】 腹部超音波診断装置（3.5MHz）の生体軟部組織の平均音速 1530m/s とすると，このときの超音波の波長を求めよ．

$$1530 \times 10^3 / 3.5 \times 10^6 \cong 0.437\,[mm]$$

【例題】 1530m/s の音波が発信から受信まで 100μs 要した．媒質臓器までの距離を求めよ．

$$1.530 = \frac{2L}{100 \times 10^{-6}} \text{ より}$$

$$L = \frac{1.530 \times 100 \times 10^{-6}}{2} = 0.0765[m] \cong 7.7[cm]$$

$$c = \frac{\lambda}{T} \qquad c = f \cdot \lambda$$

【例題】 $c_1 = 1{,}500[m/s],\ c_2 = 870[m/s]$ のとき $\theta_1 = 60°$ で入射した音波の屈折角θ_2を求めよ．

$$\sin\theta_2 = \left(\frac{c_2}{c_1} \times \sin 60°\right) = \left(\frac{870}{1500} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cong \frac{1}{2} \qquad \therefore \theta_2 = 30°$$

【例題】 530m/s の音波が発信から受信まで 100μs 要した．媒質臓器までの距離を求めよ．

$$1.530 = \frac{2L}{100 \times 10^{-6}} \text{ より}$$

$$L = \frac{1.530 \times 100 \times 10^{-6}}{2} = 0.0765[m] \cong 7.7[cm]$$

【例題】 周波数 $f = 3.5\ MHz$（波長 $\lambda \cong 0.43mm$），Q ファクタが 5，人体内の音速が 1500 m/s のときの距離分解能を求めよ．

解答 （⊿x≒1mm）

$$\Delta x = n \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Δx：距離分解能　　λ：波長　　nλ：パルス幅

n：波数（Qファクタ：1 回の超音波ビームに含まれるパルス数で通常　は4～5）

☞ λを 2 で割る意味は「サンプリング定理」による．

☞ 周波数が高く，波数が少ないほど向上する．

【例題】 入射角θが 60° で送信された超音波の周波数がF_0=5[MHz]で，検出されたドプラシフト周波数がF_d=1[KHz]であった．生体の音速をc＝1500[m/s]として，このときの血流速度を求めよ．

$$v = \frac{c}{2 \times \cos\theta} \times \frac{F_d}{F_0} = \frac{1{,}500[m/s]}{2 \times \cos 60[°]} \times \frac{1[kHz]}{5[MHz]} = \frac{1.5 \times 10^3[m/s]}{2 \times 0.5} \times \frac{1 \times 10^3[Hz]}{5 \times 10^6[Hz]}$$

$$= \frac{1.5 \times 10^6[m/s]}{5 \times 10^6} = 0.3[m/s] = 30[cm/s]$$

流速 v ＝ 30 [cm/s]

関数の展開と近似式

1.　マクロ—リン展開

微分の知識を応用すると複雑な関数を“べき関数”の和として表現できる. このような操作を“関数の展開”という.

【べき関数】

x, x^2, x^3, …x^n.　　2^0, 2^1, ,2^2, 2^3,2^4,…, 2^n.

（1）　テイラー展開の公式

関数 $f(x)$ の $x=a$ の近くでの値（近似値）を知りたいことがある. このとき関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{f(a)}{0!}(x-a)^0+\frac{f^1(a)}{1!}(x-a)^1+\frac{f^2(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

のように“べき級数”に展開することを、a の周りに $f(x)$ をテーラー展開するという.

n!：$n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1$　n から 1 まで順次掛け算する.

$f^n(a)$:関数 $f(x)$ を繰り返し n 回微分してその結果の式の x のところに a を代入する.

例

$f(x)=3x^5$　ならば　　$f(a)=3a^5$

$f^1(x)=15x^4$　だから　　$f^1(a)=15a^4$

$f^2(x)=60x^3$　だから　　$f^2(a)=60a^3$

:　　　　:

Σ記号でまとめれば

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$　ただし　0! ＝ 1　とする.

（2）　マクロ—リン展開

上式において a ＝ 0 とおくと, より実用的な“マクロ—リン展開”の公式が得られる.

$$f(x)=\frac{f(0)}{0!}x^0+\frac{f^1(0)}{1!}x^1+\frac{f^2(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

Σ記号でまとめれば

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

2. 関数の展開とオイラーの公式

（1）　マクロ—リン展開式

①　二項級数

関数 $f(x)=(1+x)^4$ を展開すると $1+4x+6x^2+4x^3+x^4$ になる. これを

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$$

と書くと

$$a_0=1,\quad a_1=4,\quad a_2=6,\quad a_3=4,\quad a_4=1$$

これらの係数は次のような導関数の計算から導くことができる.

a.　係数計算

$f(x)=(1+x)^4$　　　$f(0)=1$

$f^1(x)=4(1+x)^3$　　　$f^1(0)=4$

$f^2(x)=4\cdot3(1+x)^2$　　　$f^2(0)=4\cdot3$

$f^3(x)=4\cdot3\cdot2(1+x)$　　　$f^3(0)=4\cdot3\cdot2$

$f^4(x)=4\cdot3\cdot2\cdot1$　　　$f^4(0)=4\cdot3\cdot2\cdot1$

また

b.　展開式の微分

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$　　　$f(0)=a_0$

$f^1(x)=\quad a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3$　　　$f^1(0)=a_1$

$f^2(x)=\quad 2a_2+6a_3x+12a_4x^2$　　　$f^2(0)=2a_2$

$f^3(x)=\quad 6a_3+24a_4x$　　　$f^3(0)=6a_3$

$f^4(x)=\quad 24a_4$　　　$f^4(0)=24a_4$

a. b. より　係数を求める

$$a_0=\frac{f(0)}{0!}=\frac{1}{1}=1$$

$$a_1=\frac{f^1(0)}{1!}=\frac{4}{1}=4$$

$$a_2=\frac{f^2(0)}{2!}=\frac{12}{2\cdot1}=6$$

$$a_3=\frac{f^3(0)}{3!}=\frac{6a_3}{3\cdot2\cdot1}=\frac{4\cdot3\cdot2}{6}=4$$

$$a_4=\frac{f^4(0)}{4!}=\frac{f^4(0)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{24a_4}{24}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{24}=1$$

ここで、1～n までの整数を逐次掛けた積を“n の階乗”と

よび, 記号 **n!** で表すと, 上の結果は次のように書ける.

$$f(x)=(1+x)^4$$

$$\cong \frac{f(0)}{0!}x^0+\frac{f^1(0)}{1\,!}x^1+\frac{f^2(0)}{2\,!}x^2+\frac{f^3(0)}{3\,!}x^3+\frac{f^4(0)}{4\,!}x^4$$

$$\cong 1+4x+6x^2+4x^3+1x^4$$

一般に

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

と展開されるものとすれば, うえと同様の計算によって

$$f(x)=\frac{f(0)}{0!}x^0+\frac{f^1(0)}{1!}x^1+\frac{f^2(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\cdots$$

が得られる.

これを**マクロ一リン展開式**または**マクロ一リン級数**という.

関数 $f(x)=e^x$ の**マクロ一リン展開**すると

まず $f(x)=e^x$ $f(0)=e^0=1$

$f'(x)=e^x$ $f'(0)=e^0=1$

$f''(x)=e^x$ $f''(0)=e^0=1$

同様に $f^n(0)=1$

ゆえに

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

Σで表せば

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\,!}$$

となる.

☞ **超重要**

この式で x ＝1 とおくと

$$e\cong 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cong 2.718$$

「自然対数の底」 の近似値が導かれる.

② 三角関数の展開

関数 $f(x)=\sin x$ をマクロ一リン展開すると

$f(x)=\sin x$ $f(0)=0$

$f^1(x)=\cos x$ $f^1(0)=1$

$f^2(x)=-\sin x$ $f^2(0)=0$

$f^3(x)=-\cos x$ $f^3(0)=-1$

$f^4(x)=\sin x$ $f^4(0)=0$

$$\therefore\ \sin x=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{31}x^3+\frac{0}{4\,!}x^4+\frac{1}{5\,!}x^5+\cdots$$

$$\therefore\ \sin x=x-\frac{x^3}{31}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

関数 $f(x)=\cos x$ をマクロ一リン展開すると.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{21}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

(2) オイラーの公式

関数 $f(x)=e^x$ をマクローリン展開すると.

まず　$f(0)=e^0=1$

$f^1(x)=e^x$　より　$f^1(0)=1$

$f^2(x)=e^x$　より　$f^2(0)=1$

ゆえに

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{21}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

ここで, x=jθとおけば

$$e^{j\theta}=1+\frac{j\theta}{1!}+\frac{(j\theta)^2}{21}+\frac{(j\theta)^3}{3!}+\frac{(j\theta)^4}{4!}+\frac{(j\theta)^5}{5!}+\cdots$$

$$=1+j\theta+\frac{j^2\theta^2}{21}+\frac{j^3\theta^3}{3!}+\frac{j^4\theta^4}{4!}+\frac{j^5\theta^5}{5!}+\cdots$$

$$=1+j\theta-\frac{\theta^2}{21}-\frac{j\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+\frac{\theta^5}{5!}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots\right)+j\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots\right)$$

ここで $f(x)=\sin x$,　$f(x)=\cos x$ のマクローリン展開より

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

が導出される.

☞　**超重要**

この式は, 指数関数と三角関数を結びつけたもので, **オイラーの公式**という.

微分　$\boxed{e^x \Leftrightarrow e^x}$　積分

$f(x)=e^{ax}$　の n 階微分

$f^1(x)=(e^{ax})^1=a\cdot e^{ax}$　… 1 階微分

$f^2(x)=(e^{ax})^2=a^2\cdot e^{ax}$　… 2 階微分

$f^3(x)=(e^{ax})^3=a^3\cdot e^{ax}$　… 3 階微分

:

:

$f^n(x)=(e^{ax})^n=a^n\cdot e^{ax}$　… n 階微分

j を上式の e^{ax} にいれる. つまり a=j .

$f(x)=e^{jx}$　の n 階微分　　$e^{ax}\Rightarrow e^{jx}$　　a=i

$f(x)=e^{ax}\quad\Rightarrow\quad f(x)=e^{jx}$

$f^1(x)=a\cdot e^{ax}\quad\Rightarrow\quad f(x)=j\cdot e^{jx}$

$f^2(x)=a^2\cdot e^{ax}\quad\Rightarrow\quad f(x)=j^2\cdot e^{jx}=-1\cdot e^{jx}=-e^{jx}$

$f^2(x)=(e^{ax})^2=a^2\cdot e^{ax}$　… 2 階微分

$f^3(x)=(e^{ax})^3=a^3\cdot e^{ax}$　… 3 階微分

e^xの性質

【問題1】 $f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$ の近似式を求める.

$$f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}} \qquad f(0)=(1+0)^{\frac{1}{2}}=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(1)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(0)=\frac{1}{2}(1+0)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot(1)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(0)=-\frac{1}{4}(1+0)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}$$

したがって $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{(\frac{1}{2})}{1!}x^1+\dfrac{(-\frac{1}{4})}{2!}x^2+\cdots$ となり

☞ $\sqrt{1+x}$ の近似式は

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots$$ となる！

【問題2】 $f(x)=\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}}$ の近似式をも求める.

$$f(x)=\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}} \qquad f(0)=(1-0)^{\frac{1}{2}}=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(0)=-\frac{1}{2}(1-0)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}\cdot(-1)=-\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(1-0)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}$$

したがって $\sqrt{1-x}=1+\dfrac{(-\frac{1}{2})}{1!}x^1+\dfrac{(-\frac{1}{4})}{2!}x^2+\cdots$ となり

☞ $\sqrt{1-x}$ の近似式は

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\cdots$$ となる！

☞ 合成関数の微分法

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ より

$\dfrac{dy}{du}=u^{\frac{1}{2}} \qquad \dfrac{du}{dx}=1+x$ とおく

$y=u^{\frac{1}{2}} \qquad u=1+x$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

☞ 超重要　アインシュタインの相対性理論

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \cdots ①$$

この式は アインシュタインの相対性理論 の中で動いている物体の質量を求める式である.

式の関係より速さが速いほど質量 m が大きくなることが分かる.

速度が大きくなるほど質量が大きくなるということは、エネルギーと質量が同じ種類の量であるということを示している.

いま, この関係を計算により導けば次のようになる.

$$m \cong m_0 + \frac{\frac{1}{2}m_0 v^2}{c^2} \quad \cdots ②$$

$\frac{1}{2}m_0 v^2$ は速度 v で運動する物体のもっている運動エネルギーであるから、これを W で示せば,

$$m \cong m_0 + \frac{W}{c^2} \quad \cdots ③$$

したがって,

$$m - m_0 = \Delta m \cong \frac{W}{c^2} \quad \cdots ④$$

となる.

☞ 質量を エネルギー単位 で表せば ④式 より

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \Delta mc^2 \quad \cdots ⑤$$

アインシュタインの式 が導かれる.

マクローリン展開の応用

ここで ①式 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ は

⑤式 $\frac{1}{2}mv^2 = mc^2$

を導く途中の式であるが、ここでも マクローリン展開 を利用すれば途中の計算が近似式で求めることができる。

①式中の $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ を x とおいて、

$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ を $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ として、マクローリン展開すれば

問題2 と同じ解法で

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(0) = (1-0)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} \cdot (-1) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}(1-0)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$$

したがって $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{(\frac{1}{2})}{1!}x + \cdots$ となり

$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ の近似式は $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cong 1 + \frac{1}{2}x \cdots$ となる.

ここで ①式 に戻り

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cong m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]$$

$$m \cong m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right] = m_0 + \frac{m_0 v^2}{2c^2} = m_0 + \frac{\frac{m_0 v^2}{2}}{\frac{2c^2}{2}} = m_0 + \frac{\frac{1}{2}m_0 v^2}{c^2}$$

となり、 $m \cong m_0 + \frac{\frac{1}{2}m_0 v^2}{c^2}$ が導かれる.