デジタル画像処理

第１章　基礎工学

１．接頭語

10^{24}：Y(ﾖﾀ)	10^{-3}：m(ﾐﾘ)
10^{21}：Z(ｾﾞﾀ)	10^{-6}：μ(ﾐｸﾛ)
10^{18}：E(ｲｸｻ)	10^{-9}：n(ﾅﾉ)
10^{15}：P(ﾍﾟﾀ)	10^{-12}：p(ﾋﾟｺ)
10^{12}：T(ﾃﾗ)	10^{-15}：f(ﾌｪﾑﾄ)
10^{9}：G(ｷﾞｶﾞ)	10^{-18}：a(ｱﾄ)
10^{6}：M(ﾒｶﾞ)	10^{-21}：ζ(ｾﾞﾌﾟﾄ)
10^{3}：k(ｷﾛ)	10^{-24}：y(ﾖｸﾄ)

２．数直線

μ　　　　　　m　　　　　　　　k

M

0.00001　0.0001　0.001　0.01　0.1　1　10　100　1000　1000

10000

10^{-5}　10^{-4}　10^{-3}　10^{-2}　10^{-1}　10^{0}　10^{1}　10^{2}　10^{3}　10^{4}

10^{5}

$\frac{1}{100000}$　$\frac{1}{10000}$　$\frac{1}{1000}$　$\frac{1}{100}$　$\frac{1}{10}$

３．指数と対数

指数と対数は表と裏で計算効率を良くするために考えられたもの．

３－１．指数

いま，次のような式がある．

2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2×2.

この式，2 の掛け算だとは分かりますが，一見ではいったい 2 を何回掛けているのか分からない．

こんなとき2を3回掛けたものは 2^3，2を 10 回掛けたものは 2^{10} と表す．ちなみに上式は 2^{25} と表わせば書くのも効率的で一目瞭然である．

(1) 指数

ある数aをn回 掛けた数を a^n と書き，“ａ の n乗(累乗) ”といい，“ n を指数 ”という．“ a を底 ”という．

(例) 2×2×2 ＝ 2^3 = 8　　5×5×5×5×5 = 5^5 = 3125

(2) 累乗根

n乗すると a になる数を $\sqrt[n]{a}$ で表わし，平方根･立方根･n 乗根などはまとめて a の累乗根という．

(例) $a=\sqrt[n]{a^n}$　　$5=\sqrt[3]{125}$

(3) 分数の指数

分数の指数は次のようになる．

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \Rightarrow \sqrt[3]{5^2}=5^{\frac{2}{3}}$$

(4) 0と負の指数

0と負の指数は次のようになる．

$$a^0=1 \Rightarrow 5^0=1$$

$$a^{-1}=\frac{1}{a^n} \Rightarrow 10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}$$

(5) 指数法則(a,b≠0 任意実数，m,n 任意整数)

① $a^m a^n=a^{m+n} \Rightarrow 2^3\times 2^2=2^{3+2}=2^5$

② $(a^m)^n=a^{m\times n} \Rightarrow (3^2)^3=3^{2\times 3}=3^6$

③ $(ab)^n=a^n b^n \Rightarrow (3\times 5)^2=3^2\times 5^2$

④ $\frac{a^m}{a^n}$ （m≠ n）$=a^{m-n}$

［ a^0=1の証明 ］

（m＝n）＝1

☞ $\frac{a^3}{a^3}=\frac{a\times a\times a}{a\times a\times a}=a^{3-3}=a^0=1$

☞ **自然対数の底　e　の指数**

$$e^{-x}=\frac{1}{e^x}$$

$$e^x\cdot e^y=e^{x+y}$$

$$e^0=1,\quad e^{\infty}=\infty,\quad e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=0$$

マクローリン展開より

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\cong 2.718$$

$$\log_e x=\frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}\cong 2.3026\cdot\log_{10} x$$

$$\log_{10} x=\frac{\log_e x}{\log_e 10}\cong 0.4343\cdot\log_e x$$

3－2．対数

指数計算では2を3乗すれば8で，$2^3=8$ で表わす．逆に，『2は何乗すれば8になるか』を求めることを $\log_2 8=3$ と表わす．

(例) $\log_{10}1000=3$　$\log_2 16=4$

真数

$\log_2 8 = 3$ と表わす。

底　対数

(1) $\log_a 1=0$，$\log_a a=1$．

指数法則より $a^0=1$，$a^1=a$ であるので

$$\log_a 1=0,\ \log_a a=1$$

となる．

(2) $\log_a M^n = n\log_a M$

真数に累乗があれば log の前に出す．

$\because$ $M=a^x$ とすれば $M^n=(a^x)^n=a^{xn}$ となる．

$\therefore$ $\log_a M^n=\log_a a^{xn}=xn=n\log_a M$

(例題) $\log_3\sqrt{27}$ はいくらになるか？

$$\log_3\sqrt{27}=\log_3 27^{\frac{1}{2}}=\log_3(3^3)^{\frac{1}{2}}=\log_3 3^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\log_3 3=\frac{3}{2}$$

$$\log_3\sqrt{27}=\log_3 27^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_3 3^3=\frac{1}{2}\cdot 3\ \log_3 3=\frac{3}{2}$$

(3) $\log_a(A\cdot B)=\log_a A+\log_a B$

$A=a^m$，$B=a^n$ とすれば指数法則 $A\cdot B=a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

を利用して

$$\log_a(A\cdot B)=\log_a a^{m+n}=m+n$$

また $\log_a A+\log_a B=m+n$

$\therefore$ $\log_a(A\cdot B)=\log_a A+\log_a B$

割り算も同様に

$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right)=\log_a A-\log_a B$$

となる．

(4) $\log_a Y=\dfrac{\log_b Y}{\log_b a}$ 底の変換公式

まず $Y=a^x$ の両辺に対し b を底とする対数をとる．

$$\log_b Y=\log_b a^x=x\log_b a$$

ここで $x=\log_a Y$ なので

$$\log_b Y=\log_b a^x=x\log_b a=\log_a Y\times\log_b a$$

両辺を $\log_b a$ で割れば

$$\frac{\log_b Y}{\log_b a}=\log_a Y$$

$$\therefore\ \log_a Y=\frac{\log_b Y}{\log_b a}$$

(例題) $\log_2 3\cdot\log_3 8$ はいくらになるか？

底が異なるので変換公式でそろえる．

【 対数の公式 】

$$\log_a A\cdot B=\log_a A+\log_a B$$
$$\log_a\frac{A}{B}=\log_a A+\log_a B$$
$$\log_a A^n=n\log_a A$$
$$\log_a\sqrt[n]{A}=\frac{1}{n}\log_a A$$

４．指数と対数の関係

指数　　　　　　　　対数

参考　$a^0 = 1$　　　　$\log_a 1 = 0$

ａの０乗はいくつ ⇒１　　ａを何乗したら１になるか ⇒ ０

$a^1 = a$　　　　$\log_a a = 1$

参考より

$a^x = \alpha$　　　　$x = \log_a \alpha$　… ①

$a^y = \beta$　　　　$y = \log_a \beta$　… ②

（1）　$a^x \cdot a^y = \alpha \cdot \beta$　より

$a^{x+y} = \alpha \cdot \beta$

$\therefore \log_a \alpha \cdot \beta = x + y = \log_a \alpha + \log_a \beta$

（2）　$\dfrac{a^x}{a^y} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　より

$a^{x-y} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

$\therefore \log_a \dfrac{\alpha}{\beta} = x - y = \log_a \alpha - \log_a \beta$

（3）　$(a^x)^n = a^{x \cdot n} = \alpha^n$　より

$\log_a \alpha^n = n \cdot x = n \cdot \log_a \alpha$

底の変換

$\log_a b$ は１と異なる任意の正数 C を底とする対数で表すことができる．

$\log_a b = x$　とおけば　$a^x = b$

両辺を，C を底とするで対数とれば

$\therefore \log_c a^x = \log_c b$

$x \log_c a = \log_c b$

$x = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$\therefore \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

5．ベクトル

5−1．スカラーとベクトル

スカラー ： 単に大きさのみの物理量
(長さ・重さ・体積・時間・温度など)

ベクトル ： 大きさと方向をもつ物理量
(力・速度・加速度など)

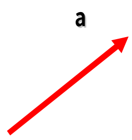
5−2．ベクトルの表わし方

矢印のついた線分(有向線分といい始点・終点がある)で表わし，大きさは線分の長さ向きは矢印の方向で表わす．

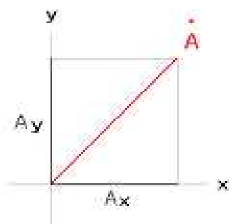
文字では $\overrightarrow{OA}$，$\vec{a}$，a(数学・物理)，$\dot{a}$ (電気) で表わす．

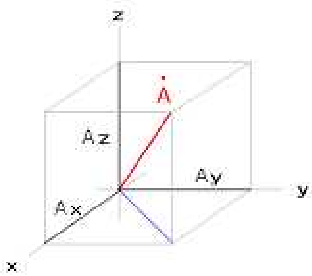
大きさは正負に関係なく，絶対値をとって

$\left|\overrightarrow{OA}\right|$，$|\vec{a}|$，$|\dot{a}|$ などと表わす．



5−3．ベクトルの分解





三次元ベクトルは x，y，z軸方向の成分に分解できる．ベクトルの x，y，z成分は式①で示すように、それぞれの方向の単位ベクトル i，j，k とその方向への大きさ Ax，Ay，Az でもって表すことができる．

A = Ax**i** + Ay**j** +Az**k**　……　①

5−4．内積と外積

二つのベクトルの積には式②のように，ドット (･) で示す内積と×で示す外積がある．

内積

A･**B** ＝ AB cosθ ＝ AxBx + AyBy + AzBz

内積の結果は ⇒ スカラー量

外積

A×**B** ＝ −**B**×**A** ＝ AB sinθ**n**

θ： 二つのベクトル間の角度

n ： 二つのベクトル **A**，**B** に対して互いに垂直な単位ベクトル

6．三角関数と波

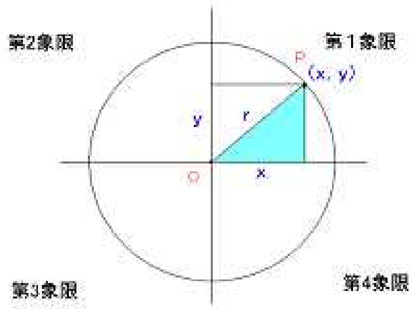
三角関数を復習し、電気・電子工学における波の表し方について学ぶ。

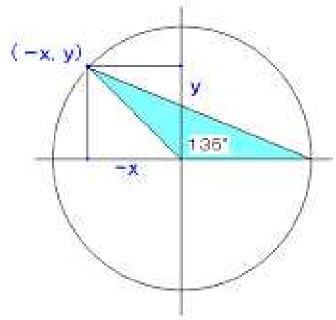
6−1．三角関数の拡張

三角形の角度を斜辺分の底辺・斜辺分の高さ・底辺分の高さで表していたら 90°までしか表せない．そこで斜辺を r，底辺を x，高さを yと新しく定義し，半径 r の円の原点 O を中心とした x軸・y軸のグラフで考える．また動径 OP が円弧と交わる点を(x, y)で表わす．さらに x-y 平面グラフには下の図のように第1〜4象限を定義する．角度の測り方に関しては x 軸正方向を 0 として反時計回りに角度を測る．

座標を利用して

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ で表現すれば $0° \to 360°$ まで表現できる．





$$\sin 135° = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 135° = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 135° = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1$$

6－2． 単位円（斜辺が1の三角関数）

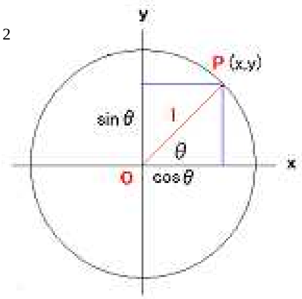
半径1の円を，原点0を中心としたｘ軸･ｙ軸のグラフで考え動径OPが円弧と交わる点を(x, y)で表わす．ピタゴラスの定理により，半径の二乗はｘ軸とｙ軸の二乗和の平方根，つまり以下のようになる．

$$1^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$$

$$\sin\theta = \frac{y}{1} \quad \therefore y = \sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{1} \quad \therefore x = \cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



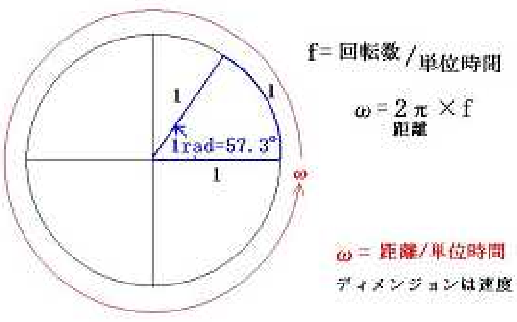
$$1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \quad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

6－3． ラジアン［rad］とオメガ［ω］

三角関数は円（回転）運動の分析にも使われる．運動を解析する際には，運動の距離を知る必要がある．ところが度数で示される角度は，距離とは直接関係がない．そこで，また半径１の円を基準に考え，半径１の扇形の角度をその円弧の長さで表わした単位が １ラジアン[rad] となる．したがって，360°は円周の長さである2π となる．半径ｒ［m］の円周は２πｒ［m］，面積はπr^2［m^2］となる．また円の周回数(周波数)をｆとして２πｆを **角周波数** または **角速度[ω]** と呼ぶ．

周波数は，単位時間当たりの回転数なので，これに１回転あたりの距離 ２π を掛けることにより 距離/時間 という速度のディメンジョンになり，これを角周波数または角速度といい ω で表す．



$$\omega = 2\pi f \text{ [rad/sec]}$$

今度は ω に時間を掛けたら回転距離 rad になる．

$$\omega t = 2\pi f t \text{ [rad]} \qquad \frac{rad}{\sec} \times \sec = rad$$

要点

- rad は距離と角度を同時に表す．
- ωは角速度で単位時間に何回転しているかを表し，時間を掛けたら rad になる．

6－4． 等速円運動と正弦波

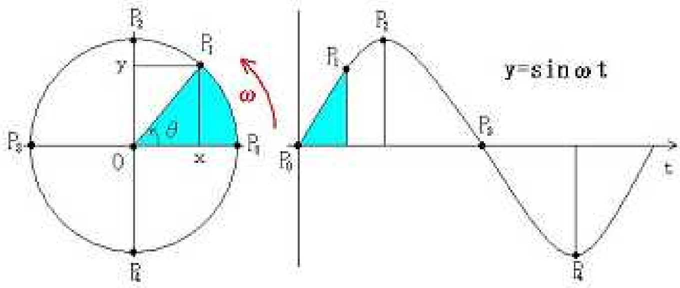
等速円運動を横から眺めると，図のように周期的な波となる．角速度$\omega (= 2\pi f)$で回転している単位円周上に任意の点$P_1(x, y)$をとると，

$$\angle P_1OP_0 = \theta = \omega t \text{ [rad]} \qquad y = 1 \times \sin\theta = \sin\omega t$$

そこで，横軸にθまたはtを変数としてyの値をプロットしていくと，

$$y = \sin\theta = \sin\omega t$$

の曲線(波)が描かれる．

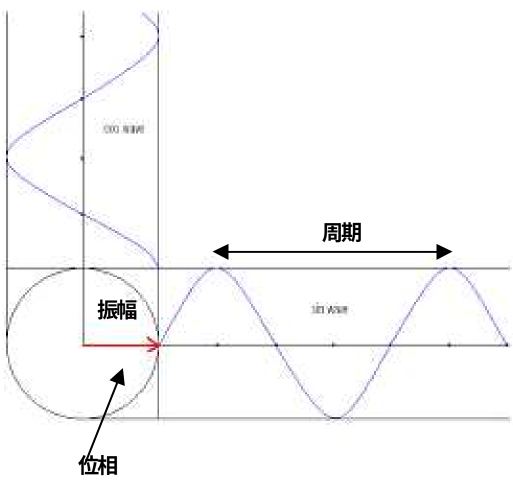


6－5． 正弦波と余弦波

正弦波と余弦波は同じ形をしているが互いに位置がずれている．この波には **振幅，周波数，位相** という3つの基本的性質がある．

振幅はピークの高さであり波の大きさを示し，**周波数（Hz）は波がいかに速く時間とともに変化するか**を示し，そして**位相は周期的な変化においてその中のどこに位置しているか**を示している．

余弦波

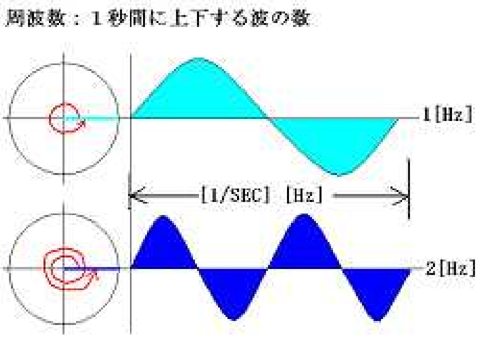


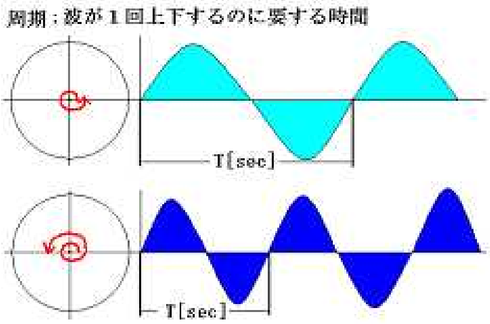
$$I_m e^{j(\omega t - \theta)} = I_m \cos(\omega t - \theta) + j\sin(\omega t - \theta)$$

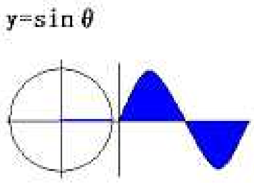
周波数(f)と周期(T)，および角速度(ω)の関係

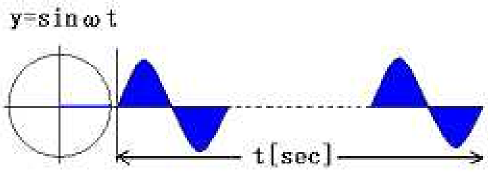
$f = 1/T$ [回転]　$T = 1/f$ [sec]　$\omega = 2\pi f$

$\therefore$ $\omega = 2\pi / T$ [rad/sec]









7．指数関数

指数関数は e (2.718 …) を底としている．式の表示としては

e^x または exp (x) として表す．ここで x はべき指数である．

指数関数は自然対数 (ln) の逆関数であり，

$y = e^x$ ならば $\ln y = x$ である．

7－1．指数関数の一般的性質

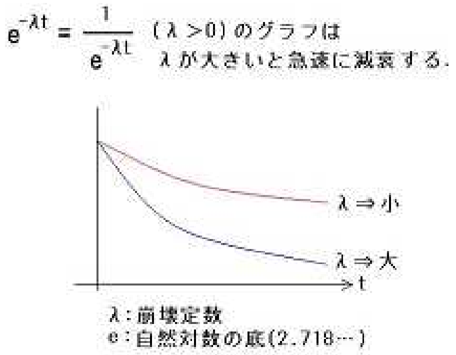
$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^x \cdot e^y = e^{(x+y)}$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{\infty} = \infty$$

$$e^{-\infty} = 0$$



7－2．自然現象式

放射線の崩壊や X 線の減弱式．

$$A = A_0 e^{-\lambda t}$$

MRI の緩和現象式．

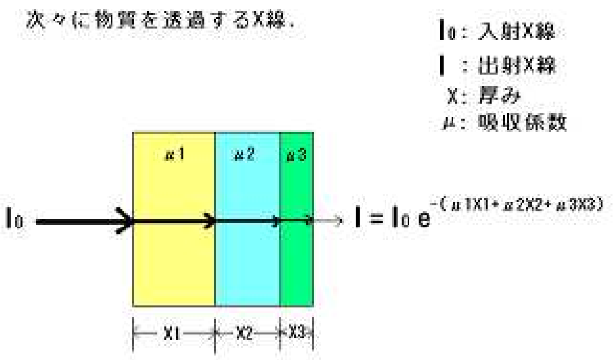
$$M = M_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{TR}{T_1}}\right) \cdot e^{-\frac{TE}{T_2}}$$

地震の振動．

$$A = A_0 \cdot \sin \omega t \cdot e^{\pm \lambda t}$$

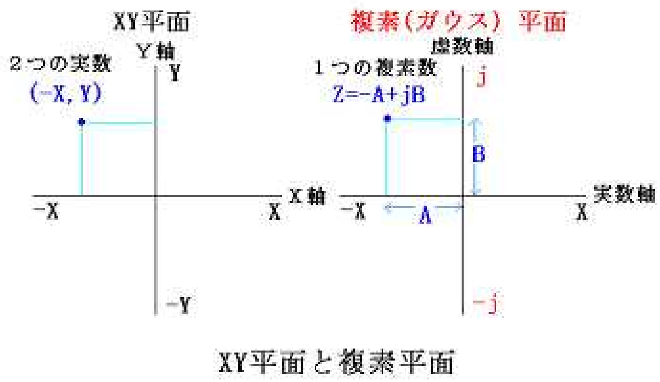
7－3．X 線減弱式の意味 (指数の掛け算は足し算)

物質を次々に透過する X 線の強度は最終的に出てくるときには，指数部分(それぞれの物質の厚み及び減弱係数)の積の和となる．

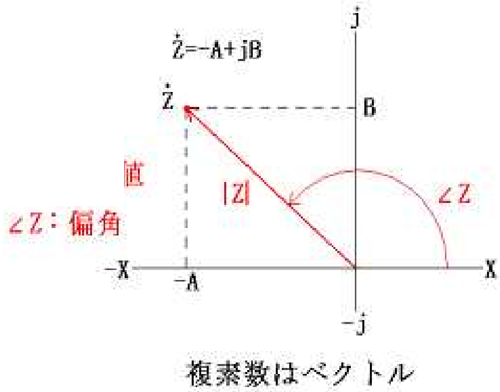


8．複素数とガウス平面

8－1．複素平面 (ガウス平面)



複素数 ＝ 複素平面状の1点と原点を結ぶベクトル

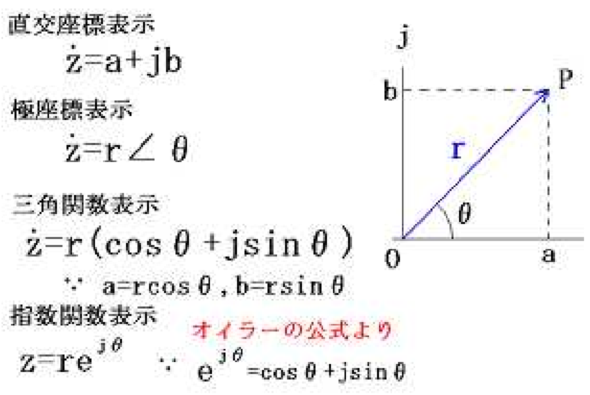


8－2．ベクトルの大きさ(絶対値)と偏角

絶対値： $|Z| = \sqrt{A^2 + B^2}$

偏角： $\angle Z = \tan^{-1}(B/-A)$

8－3．複素数の表し方



第2章　フーリエ変換

序論　フーリエ変換とは

- 空間周波数は単位長さに存在する波の数。［cycles/mm］
- 周期を持つ波（周期関数）はフーリエ級数で表せる。
- 一般関数はフーリエ逆変換で表される。
- 方形パルスのフーリエ変換はシンク関数となる。
- 線形システムの出力は、入力とインパルス応答の畳み込み積分で表される。
- デジタル画像は周波数成分（スペクトル）分布を求めることができる。

フーリエ変換を学ぶための数学と物理

- 三角関数（sin, cos）
- 微分（瞬間の変化率を求める　：　速度、加速度）
- 積分（関数の積和　：　面積を求める）
- ベクトルを考える複素数
- 微分や積分における自然対数の底
- 三角関数とベクトルを結びつけるオイラーの公式

  $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$

信号

様々な周波数の波が合成されて出力されたもので、周波数ごとに振幅と位相をもつ振動ベクトル。

周波数 frequency

① 周波数［cycles/sec, rad/sec］

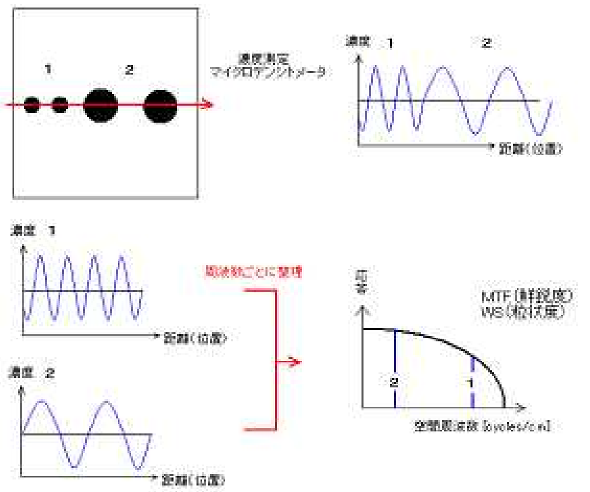
電波や音波、電圧・電流などのように時間的に変動する波。

② 空間周波数［cycle/mm］

空間（画像）上での明暗が変動する縞模様。

フーリエ変換

周波数ごとに信号の強さ（振幅）と位相を求めることで、実空間から周波数空間への変換であり、画像であれば位置に対応する濃度を、周波数に対応する成分に変換することで、画像処理・評価に利用されている。



空間領域から周波数領域へ

フーリエ変換の手順（三角関数 ⇒ 複素数）

① 従来のフーリエ級数展開式

② オイラーの公式に代入して $e^{j\theta}$ に置き換える

③ $e^{j\theta}$ と $e^{-j\theta}$ それぞれにまとめる。

④ 複素数表示

1．フーリエ級数展開とフーリエ変換 P30

関数

周期関数　⇒　フーリエ級数

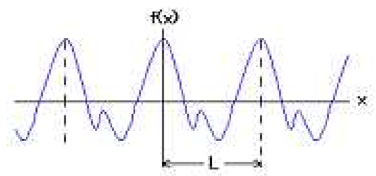
非周期関数　⇒　フーリエ変換

濃淡模様画像	フーリエ変換	スペクトル表示
空間領域	⇔	周波数領域
	フーリエ逆変換	

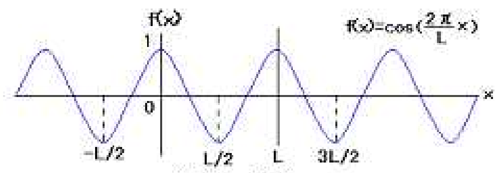
1－1．周期関数とフーリエ級数

1）周期関数

図に示すように、一定の周期 L（cm）で繰り返しているような関数を周期関数という。



周期関数



余弦（cos）関数

距離 x の関数、f（x）が周期 L を持つ周期関数であれば、次の関係が成立する。

$$f(x)=f(x+nL)\quad\cdots\quad①$$

ただし、n=1,2,3 …

$$f(t)=f(t+nT)\ ：時間関数$$

図で示す余弦関数（cos）は最も基本的な周期関数であり、次式で示される。

$$f(x)=\cos(\frac{2\pi}{L}x)=\cos(2\pi ux)\quad\cdots\quad②$$

u：空間周波数［cycles/cm］

$$f(t)=\cos(\frac{2\pi}{T}t)=\cos(2\pi f t)\quad f：周波数$$

u と L の関係は

$$u=\frac{1}{L} \quad \cdots ③ \qquad f=\frac{1}{T}$$

角周波数 [rad/cm] で表せば

$$f(x)=\cos(\omega x) \quad \cdots ④ \qquad f(t)=\cos(\omega t)$$

各周波数、周期、空間周波数との関係

$$\omega=\frac{2\pi}{L}=2\pi u \quad \cdots ⑤ \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

2) 周期関数のフーリエ級数展開

周期が L である任意の周期関数 f(x) は、三角関数の級数で表現できる。

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(n\omega_0 x)+b_n\sin(n\omega_0 x)\} \quad \cdots ⑥$$

ここで、$\omega_0=2\pi/L$ であり、

フーリエ係数 (振幅) a_n, b_n **(n=0,1,2,3…) は**

$$a_n=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos(n\omega_0 x)dx \quad \cdots ⑦$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin(n\omega_0 x)dx \quad \cdots ⑧$$

$a_0/2$ ： **直流成分 (定在波)**

$\cos(\omega_0 x),\sin(\omega_0 x)$ ： **基本波**

$\cos(n\omega_0 x),\sin(n\omega_0 x)$ ： **第n次高調波**

3) フーリエ級数 (波の分解式)

周期波(ひずみ波･三角波･方形波･･･)は定在波と様々な正弦波･余弦波に分解できます.･周期波は周波数の異なった波の集合.

$$\begin{aligned} f(t)&=a_0+a_1\cos\omega t+a_2\cos 2\omega t+\cdots+a_n\cos n\omega t\\ &\quad +b_1\sin\omega t+b_2\sin 2\omega t+\cdots+b_n\sin n\omega t\\ &=a_0+\sum_{k=1}^{n}(ak\cos k\omega t+bk\sin k\omega t)\end{aligned}$$

ここで, 振幅を表す級数 a_o, a_n, b_n は, 次のような積分式で計算できる.

$$\begin{aligned} f(t)&=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega t+\sum_{n}^{\infty}b_n\sin n\omega t\\ &=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)\end{aligned}$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\,\omega\, t\,dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\,\omega\, t\,dt$$

① **複雑な波の一周期分を積分すると cos 波と sin 波は面積が相殺されて 0 となり定在波の面積 a_0 (定在波の振幅) ×T (波の周期) のみが残る.**

② **cos 波と sin 波はそれぞれの単位波 (振幅が 1) をかけることでその部分 (同じ周期) のみが残り, a_n, b_n が計算できる.**

☞ a_0 **と** $\frac{a_0}{2}$ **の違い.**

フーリエ変換式の中で a_0 だけが仲間はずれなのはなぜか？

a_n **の仲間なのに,** a_n **の場合の**

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos n\omega t\,dt$$

とは異なり

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

となっている.

a_0 **も** a_n **の仲間と考え,**

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos n\omega t\,dt$$

のフーリエ展開式の中に入れて計算すると a_0 ではなく「$2a_0$」が求まる.

a_0 **の頭には** $\frac{1}{T}$ **が付いているけれど,** a_n **の頭には** $\frac{2}{T}$ **が付いている.**

元々,

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos 1\omega t+b_1\sin 1\omega t)+\cdots+(a_n\cos n\omega t+b_n\cos n\omega t)$$

の a_0 を求める

と決めておけば a_n の式を用いて $\frac{a_0}{2}$ で a_0 が求まる.

4） 複素フーリエ級数

複素数の表現

$Z = a + jb$　i：**虚数単位**　i^2= -1　…　⑨

共役複素数

$Z^{*} = a - jb$　…　⑩

オイラーの関係式（三角関数 ⇔ 複素指数関数）

$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$　…　⑪

$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$　…　⑫

①＋② より

$\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$　…　⑬

① － ② より

$\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$　…　⑭

フーリエ級数の式⑥の右辺を複素指数関数で表現すれば

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}\right\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\omega x} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\omega x}\right\} \cdots ⑮$$

ここで、複素指数関数の係数を複素フーリエ係数といい

$C_0 = \dfrac{a_0}{2}$　…　⑯

$C_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$　…　⑰

$C_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$　…　⑱

と定義すると「複素フーリエ級数」は式⑮から

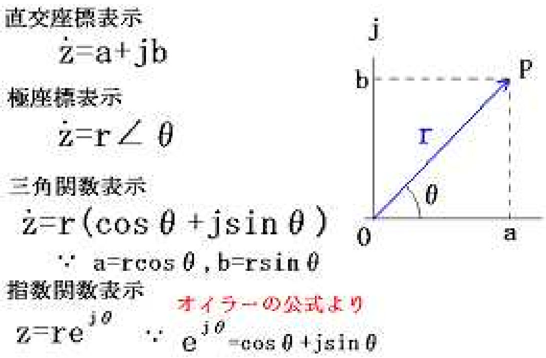
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega x} \cdots ⑲$$

複素フーリエ係数 Cn **は**

$$C_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)e^{-in\omega x}dx \cdots ⑳$$

で求まる。

6） 複素数の表し方



2． フーリエ変換

周期性という制約を取り払い、一般的な関数にフーリエ級数を拡張したもの。

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$　：**f(x) のフーリエ変換**

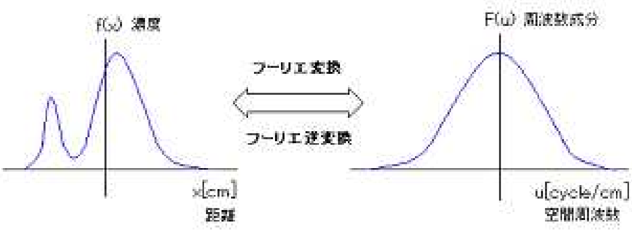
$f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$　：**F(ω)の逆フーリエ変換**

これらを角周波数ω[rad/cm]ではなく、空間周波数 u[cycles/cm]で表すと、ω＝2πu であるから

$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi ux}dx$

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{i2\pi ux}du$

となる。



関数f(x)と周波数スペクトル

3． 関数の展開と近似式

3－1． 関数の展開

微分の知識を応用すると複雑な関数を“べき関数”の和として表現できる．このような操作を“関数の展開”という．

[べき関数]

x， x^2， x^3， …x^n．　2^0, 2^1, ,2^2, 2^3,2^4,…， 2^n.

1) テイラー展開の公式

関数 $f(x)$ の $x=a$ の近くでの値（近似値）を知りたいことがある．このとき関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{f(a)}{0!}(x-a)^0+\frac{f^1(a)}{1!}(x-a)^1+\frac{f^2(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

のように“べき級数”に展開することを、a の周りに $f(x)$ をテーラー展開するという．

n!： $n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$　n から 1 まで順次掛け算する．

$f^n(a)$ ：関数 $f(x)$ を繰り返し n 回微分してその結果の式の x のところに a を代入する．

例

$f(x)=3x^5$　ならば　$f(a)=3a^5$

$f^1(x)=15x^4$　だから　$f^1(a)=15a^4$

$f^2(x)=60x^3$　だから　$f^2(a)=60a^3$

：　　　：

Σ記号でまとめれば

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$　ただし　0！ ＝ 1　とする．

2) マクローリン展開

上式において a ＝ 0 とおくと，より実用的な“マクローリン展開”の公式が得られる．

$$f(x)=\frac{f(0)}{0!}x^0+\frac{f^1(0)}{1!}x^1+\frac{f^2(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

Σ記号でまとめれば

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

3－2． マクローリン展開とオイラーの公式

1) マクローリン展開式

① 二項級数

関数 $f(x)=(1+x)^4$ を展開すると $1+4x+6x^2+4x^3+x^4$ になる．

これを

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$$

と書くと

$$a_0=1,\quad a_1=4,\quad a_2=6,\quad a_3=4,\quad a_4=1$$

これらの係数は次のような導関数の計算から導くことができる．

$f(x)=(1+x)^4$　　$f(0)=1$

$f^1(x)=4(1+x)^3$　　$f^1(0)=4$

$f^2(x)=4\cdot3(1+x)^2$　　$f^2(0)=4\cdot3$

$f^3(x)=4\cdot3\cdot2(1+x)$　　$f^3(0)=4\cdot3\cdot2$

$f^4(x)=4\cdot3\cdot2\cdot1$　　$f^4(0)=4\cdot3\cdot2\cdot1$

また

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$　　$f(0)=a_0$

$f^1(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3$　　$f^1(0)=a_1$

$f^2(x)=2a_2+3\cdot2a_3x+4\cdot3a_4x^2$　　$f^2(0)=2a_2$

$f^3(x)=3\cdot2a_3+4\cdot3\cdot2a_4x$　　$f^3(0)=3\cdot2a_3$

$f^4(x)=4\cdot3\cdot2a_4$　　$f^4(0)=4\cdot3\cdot2a_4$

したがって

$a_0=f(0)=1$

$a_1=f^1(0)=4$

$$a_2=\frac{f^2(0)}{2}=\frac{4\cdot3}{2}=6$$

$$a_3=\frac{f^3(0)}{3\cdot2}=\frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2}=4$$

$$a_4=\frac{f^4(0)}{4\cdot3\cdot2}=\frac{4\cdot3\cdot2}{4\cdot3\cdot2}=1$$

ここで、1～n までの整数を逐次掛けた積を“n の階乗”とよび，記号 n! で表すと，上の結果は次のように書ける．

$$f(x) = (1+x)^4$$

$$\cong \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f^1(0)}{1\,!}x^1 + \frac{f^2(0)}{2\,!}x^2 + \frac{f^3(0)}{3\,!}x^3 + \frac{f^4(0)}{4\,!}x^4$$

$$\cong 1 + \frac{4}{1\,!}x + \frac{6}{2\,!}x^2 + \frac{4}{3\,!}x^3 + \frac{1}{4\,!}x^4$$

$$\cong 1 + 4x + 3x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

一般に

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

と展開されるものとすれば，うえと同様の計算によって

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f^1(0)}{1!}x^1 + \frac{f^2(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \cdots$$

が得られる．

これをマクローリン展開式またはマクローリン級数という．

関数 $f(x) = e^x$ のマクローリン展開すると

まず　$f(x) = e^x$　　$f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x$　　$f'(0) = e^0 = 1$

$f''(x) = e^x$　　$f''(0) = e^0 = 1$

同様に　$f^n(0) = 1$

ゆえに

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

Σで表せば

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!}$$

となる．

☞ 超重要

この式で x ＝1 とおくと

$$e \cong 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \cong 2.718$$

「自然対数の底」の近似値が導かれる．

② 三角関数の展開

関数 $f(x) = \sin x$ をマクローリン展開すると

$f(x) = \sin x$　　$f(0) = 0$

$f^1(x) = \cos x$　　$f^1(0) = 1$

$f^2(x) = -\sin x$　　$f^2(0) = 0$

$f^3(x) = -\cos x$　　$f^3(0) = -1$

$f^4(x) = \sin x$　　$f^4(0) = 0$

$$\therefore\ \sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{31}x^3 + \frac{0}{4\,!}x^4 + \frac{1}{5\,!}x^5 + \cdots$$

$$\therefore\ \sin x = x - \frac{x^3}{31} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

関数 $f(x) = \cos x$ をマクローリン展開すると．

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{21} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

2) オイラーの公式

関数 $f(x)=e^x$ をマクローリン展開すると.

まず $f(0)=e^0=1$

$f^1(x)=e^x$ より $f^1(0)=1$

$f^2(x)=e^x$ より $f^2(0)=1$

ゆえに

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{21}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

ここで, x＝jθとおけば

$$e^{j\theta}=1+\frac{j\theta}{1!}+\frac{(j\theta)^2}{21}+\frac{(j\theta)^3}{3!}+\frac{(j\theta)^4}{4!}+\frac{(j\theta)^5}{5!}+\cdots$$

$$=1+j\theta+\frac{j^2\theta^2}{21}+\frac{j^3\theta^3}{3!}+\frac{j^4\theta^4}{4!}+\frac{j^5\theta^5}{5!}+\cdots$$

$$=1+j\theta-\frac{\theta^2}{21}-\frac{j\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+\frac{\theta^5}{5!}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots\right)+j\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots\right)$$

ここで $f(x)=\sin x$， $f(x)=\cos x$ のマクローリン展開より

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

が導出される.

☞ **超重要**

この式は, 指数関数と三角関数を結びつけたもので, **オイラーの公式**という.

e^xの性質

微分 $\boxed{e^x \Leftrightarrow e^x}$ 積分

$f(x)=e^{ax}$ の n 階微分

$f^1(x)=(e^{ax})^1=a\cdot e^{ax}$ … 1階微分

$f^2(x)=(e^{ax})^2=a^2\cdot e^{ax}$ … 2階微分

$f^3(x)=(e^{ax})^3=a^3\cdot e^{ax}$ … 3階微分

:

:

$f^n(x)=(e^{ax})^n=a^n\cdot e^{ax}$ … n階微分

j を上式の e^{ax} にいれる. つまり a＝j .

$f(x)=e^{jx}$ の n 階微分 $e^{ax} \Rightarrow e^{jx}$ a＝i

$f(x)=e^{ax} \Rightarrow f(x)=e^{jx}$

$f^1(x)=a\cdot e^{ax} \Rightarrow f(x)=j\cdot e^{jx}$

$f^2(x)=a^2\cdot e^{ax} \Rightarrow f(x)=j^2\cdot e^{jx}=-1\cdot e^{jx}=-e^{jx}$

$f^2(x)=(e^{ax})^2=a^2\cdot e^{ax}$ … 2階微分

$f^3(x)=(e^{ax})^3=a^3\cdot e^{ax}$ … 3階微分

【問題1】 $f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$ **の近似式を求める．**

$$f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}} \qquad f(0)=(1+0)^{\frac{1}{2}}=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(1)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(0)=\frac{1}{2}(1+0)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot(1)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(0)=-\frac{1}{4}(1+0)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}$$

したがって $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{(\frac{1}{2})}{1!}x^1+\dfrac{(-\frac{1}{4})}{2!}x^2+\cdots$ **となり**

☞ $\sqrt{1+x}$ **の近似式は**

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots$$ **となる！**

【問題2】 $f(x)=\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}}$ **の近似式をも求める．**

$$f(x)=\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}} \qquad f(0)=(1-0)^{\frac{1}{2}}=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(0)=-\frac{1}{2}(1-0)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}\cdot(-1)=-\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(1-0)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}$$

したがって $\sqrt{1-x}=1+\dfrac{(-\frac{1}{2})}{1!}x^1+\dfrac{(-\frac{1}{4})}{2!}x^2+\cdots$ **となり**

☞ $\sqrt{1-x}$ **の近似式は**

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\cdots$$ **となる！**

☞ **超重要　アインシュタインの相対性理論**

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \cdots ①$$

この式は **アインシュタインの相対性理論** の中で動いている物体の質量を求める式である．

式の関係より速さが速いほど質量 m が大きくなることが分かる．

速度が大きくなるほど質量が大きくなるということは、エネルギーと質量が同じ種類の量であるということを示している．

いま，この関係を計算により導けば次のようになる．

$$m \cong m_0 + \frac{\frac{1}{2}m_0 v^2}{c^2} \quad \cdots ②$$

$\frac{1}{2}m_0 v^2$ は速度 v で運動する物体のもっている運動エネルギーであるから、これを W で示せば，

$$m \cong m_0 + \frac{W}{c^2} \quad \cdots ③$$

したがって，

$$m - m_0 = \Delta m \cong \frac{W}{c^2} \quad \cdots ④$$

となる．

☞ 質量を エネルギー単位 で表せば ④式 より

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \Delta mc^2 \quad \cdots ⑤$$

アインシュタインの式 が導かれる．

マクローリン展開の応用

ここで ①式 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ は

⑤式 $\frac{1}{2}mv^2 = mc^2$

を導く途中の式であるが、ここでも **マクローリン展開** を利用すれば途中の計算が近似式で求めることができる。

①式中の $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ を x とおいて、

$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ を $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ として、マクローリン展開すれば

問題2 と同じ解法で

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \qquad f(0) = (1-0)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} \cdot (-1) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}(1-0)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$$

したがって $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{(\frac{1}{2})}{1!}x + \cdots$ となり

$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ の近似式は $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cong 1 + \frac{1}{2}x \cdots$ となる．

ここで ①式 に戻り

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cong m_0\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]$$

$$m \cong m_0\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right] = m_0 + \frac{m_0 v^2}{2c^2} = m_0 + \frac{\frac{m_0 v^2}{2}}{\frac{2c^2}{2}} = m_0 + \frac{\frac{1}{2}m_0 v^2}{c^2}$$

となり、 $m \cong m_0 + \frac{\frac{1}{2}m_0 v^2}{c^2}$ が導かれる．

4. フーリエ変換とその性質

4−1. フーリエ変換とは

周期性という制約を取り払い、一般的な関数にフーリエ級数を拡張したもの。

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$ ： f (x) のフーリエ変換

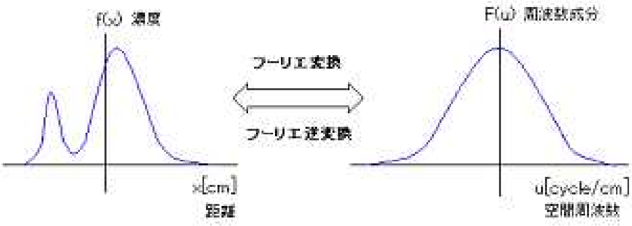
$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$ ： F(ω)の逆フーリエ変換

これらを角周波数 ω [rad/cm] ではなく、空間周波数 u[cycles/cm]で表すと、ω＝2πu であるから

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi ux}dx$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{i2\pi ux}du$$

となる。



関数f(x)と周波数スペクトル

4−2. パーシバル (パーセバル) の定理

「関数の２乗はパワー (エネルギー) に関係し、トータルのパワーは空間領域でも、周波数領域で求めても同じである。」

関数 f (x) のフーリエ変換 F (ω) は、複素数となる。

F(ω)の共役複素数を F* (ω) とすれば、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)F^*(\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}d\omega dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega]f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)^2dx$$

より、「パーシバルの定理」が得られる。

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$$

$|F(\omega)|^2$ ⇒ パワースペクトル

4−3. 畳み込み積分

２つの関数 f (x) と g (x) が与えられたとき、この関数同士の積分を「畳み込み積分」といい、f (x) ＊g (x) と表す。

$$f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$

いま、関数 f (x) のフーリエ変換 F(ω) を F(ω)=F[f(x)]で表すと

$$F\left[f(x)*g(x)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}[f(\tau)g(x-\tau)d\tau]e^{-i\omega x}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}g(x-\tau)e^{-i\omega(x-\tau)}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$=F(\omega)G(\omega)$$

結局

$$F\left[f(x)*g(x)\right]=F(\omega)G(\omega)$$

となり、「畳み込み積分のフーリエ変換は、それぞれの関数のフーリエ変換の積で表される」ことを意味し、画像処理では空間領域で畳み込み演算が行われるが、同じ画像処理が空間周波数領域では単純な積で行えることを示している。

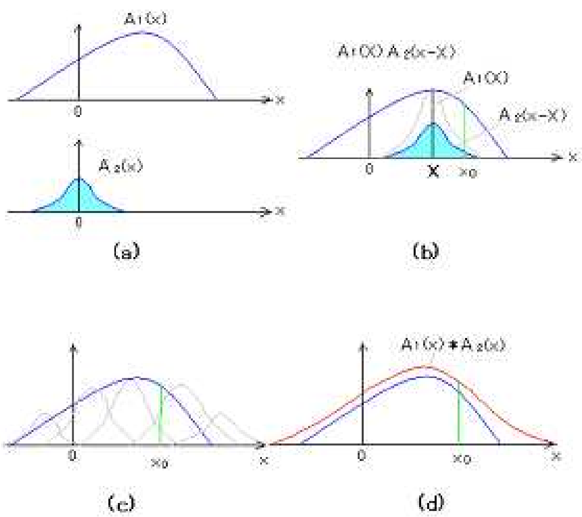
[重畳積分定理]

これはフーリエ解析でもっとも広く応用されている定理である．放射線画像の解析で MTF を使うと便利な点がたくさんある．その中で最も便利な点が子の定理に由来している．

二つの関数 $A_1(x)$, $A_2(x)$ があるとき

$$A_1(x)*A_2(x)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}A_1(X)\cdot A_2(x-X)dX$$

の「関数同士の積の形」の積分を $A_1(x)$ と $A_2(x)$ の重畳積分 (convolution integral) といい，左辺のような記号で表す．



重畳積分

図(a)のように，$A_1(x)$と $A_2(x)$があったとする．x＝0で $A_2(x)$がピークになっていて，高さを1とする．

まず，図(b)に示すように，一つの点Xでの$A_1(x)$の値は$A_1(X)$である．つぎに$A_2(x)$をプラス側にXだけずらすと$A_2(x-X)$となり，ピークがx＝Xの点にくる．

このピーク値が A1(X)になるように A2 の曲線全体を縦に引き伸ばすと点線のようになる．この点線は$A_1(X)A_2(x-X)$で表される．

縦の棒 $A_1(X)$が，x＝X の所以外，近隣にまで影響を及ぼす場合には，この縦の棒が点線のように拡がる．一般には，X から遠い点ほどその影響が少ない．

$x＝x_0$でのこの影響の大きさは，

$$A_1(X)A_2(x_0 - X)$$

である．図(c)に示すように，X を左端から右端まで動かし多くの点線を作り，この点線のx_0での値を加え合わせると，$x＝x_0$で受けた影響の総和$A(x_0)$が求まる．

いま，X が連続変数であるから 和が積分$\int dx$ に変わって，

$$[A_1(x) * A_2(x)]_{x=x_0} = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(X)A_2(x_0 - X)dX$$

と書ける．点x0を左端から右端まで変えて，この積分を何回も計算すると新しい関数

$$A_1(x) * A_2(x)$$

ができる．これが重畳積分の意味である．

結果的に赤線のようにもとの関数よりも拡がる．

☞ 二つの関数の重畳積分のフーリエ変換は，それぞれの関数の積である．

とくに$A_2(x)$がδ（デルタ）関数のとき，重畳積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_1(X)\delta(x - X)dX = A_1(x)$$

となり$A_1(x)$そのものに戻る．

(b)の縦の棒$A_1(X)$は $A_1(X)\delta(x - X)$ を表すと考える．$\delta(x - X)$の代わりに $A_2(x-X)$となれば，元の関数が「ボケる」のである．

放射線画像では、この ボケ関数 $A_2(x-X)$ のフーリエ変換が，いわゆる レスポンス関数 で，その絶対値が MTF となる．

問題6 CTやMRIの画像処理で行われる「畳込み（convolution）」とは

$$f_1(t) * f_2(\tau) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

のように，

関数どうしの積分いう．

計算例では

$$t * \tau^2 = \int_0^t (t-\tau)\,\tau^2\,d\tau = \int_0^t (t\tau^2 - \tau^3)\,d\tau$$

$$= \left[\frac{1}{3}t\tau^3 - \frac{1}{4}\tau^4\right]_0^t = \frac{1}{3}t^4 - \frac{1}{4}t^4 = \frac{1}{12}t^4$$

となる．

問題1．

例題に習い $1*1 = \int_0^t 1 \cdot 1\,d\tau$ の畳込み積分を実行せよ．

$$1*1 = \int_0^t 1 \cdot 1\,d\tau = [\ \tau\ ]_0^t = t$$

☞ $\int dx = x$ より

1. -1　2. 1　3. 2　4. t　5. t^2

【 畳み込み演算 (コンボリューション) 】

たたみ込みは、画像処理をするとき最も頻繁に用いられる計算の一つである。数学的には、元の関数と畳み込む関数との積の積分で表されるが、デジタル信号においては、掛け算と足し算で用意に表現することができる。

f ：| a | b | c | d | e | f | g |

g ：| x | y | z |

f＊g: | a' | b' | c' | d' | e' | f' | g' |

b' ＝a×x＋b×y＋c×z
c' ＝b×x＋c×y＋d×z
d' ＝c×x＋d×y＋e×z
e' ＝d×x＋e×y＋ f×z
f' ＝e×x＋ f×y＋g×z

図3　一次元畳み込み演算の計算例

一次元信号に対する畳み込みの例を 図 3 に示す。この例では、関数 f に 関数 g を畳み込み、その結果を f ＊ g として表している。 b', c'と進むに連れて、関数 g が1つずつずれて掛け算が行われていることがわかる。関数 f において両端の a と g については、関数 g をずらしていった際にそれぞれ x と z が関数 f の範囲から外れてしまうため、計算結果の a' と g' は強制的に出力画素値を 0 とするか、または、適切に処理方法を定義して適当な値を設定している。

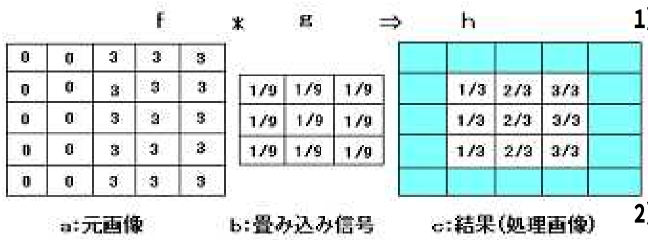


図５　畳み込み演算計算例

$$h(2,2) = f(1,1)g(1,1) + f(1,2)g(1,2) + f(1,3)g(1,3) + f(2,1)g(2,1) + f(2,2)g(2,2) + f(2,3)g(2,3) + f(3,1)g(3,1) + f(3,2)g(3,2) + f(3,3)g(3,3)$$

$$h(2,3) = f(1,2)g(1,1) + f(1,3)g(1,2) + f(1,4)g(1,3) + f(2,2)g(2,1) + f(2,3)g(2,2) + f(2,4)g(2,3) + f(3,2)g(3,1) + f(3,3)g(3,2) + f(3,4)g(3,3)$$

畳み込みを二次元に拡張して画像処理に適用することは容易であり、その例を図 4 に示す。ここで原画像を a 、畳み込む信号を b とするとき、その結果は c となる。ここでの計算は例に示すように、一次元の信号における計算を二次元に拡張したものである。計算も同様に掛け算と足し算で実行され、また、
c においてメッシュで表した周辺領域の画素値は 0 とするなどの処置を行う。

畳み込む信号 b の分布を変更することにより、同じ畳み込みの演算でもさまざまな計算結果を得ることができる。

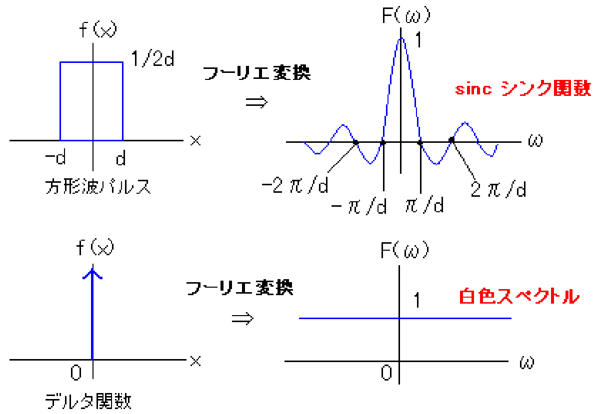
画像処理においては、画像の平滑化、微分、2 階微分などが同種の計算で可能となる。

【 フーリエ変換と畳み込み演算 】

2つの信号である関数 f と関数 g のフーリエ変換後のスペクトルをそれぞれ関数Fと関数Gと表すと、関数 f と関数 g の畳み込み f ＊ g をフーリエ変換した結果は、関数Fと関数G の単純な積で表されることが数学的に証明されている。

これは、空間領域における畳み込み演算は、周波数領域では単なる積で実現されることを示している。

4－4． フーリエ変換の応用 P37



1) 方形パルスのフーリエ変換

$$F(\omega) = \sin c(\omega d) = \frac{\sin(\omega d)}{\omega d}$$

2) デルタ関数のフーリエ変換

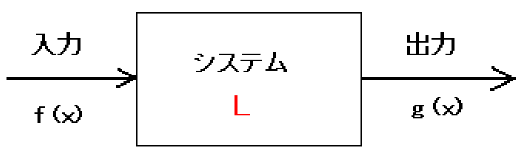
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = e^{-i\omega 0} = 1$$

3) 線形システム応答

図のようなシステムの入力 f(x) と出力 g(x) を考えるとき、その関係は、

$$g(x) = L[f(x)]$$

で表される。 記号 **L** は **演算子** である。



線形システムの入力と出力

デジタル画像処理

「線形システム」の成立条件

加法性

$f_1(x)$ に対する出力を $g_1(x)$、$f_2(x)$ に対する出力を $g_2(x)$ として、a_1, a_2 を任意の定数とするとき次式が成立すれば、システムは加法性を持つといわれる。

$$L[a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x)$$

定在性

x_1 を任意の定数とするとき、次の関係が成立すればシステムは定在性をもつといわれる。

$$L[f(x - x_1)] = g(x - x_1)$$

＊線形システムの入力 $f(x)$ に対する出力 $g(x)$ は、入力とインパルス応答の畳み込み積分で表される。

5．二次元デジタル画像の離散フーリエ変換

「フーリエ変換」とは，2次元平面の濃淡情報（画像）を”正弦波の周波数領域”に変換することをいいます．また，周波数領域に「逆フーリエ変換」を行うと”元の画像”となります．

画像 → フーリエ変換 → 正弦波周波数
画像 ← フーリエ逆変換 ← 正弦波周波数

デジタル画像は 2 次元画素の配列 f(x,y)または f(i , j) なので，フーリエ変換は 2 次元の計算（x 方向と y 方向の 1 次元フーリエ変換を 2 回）を行う．　＊面積積分

最初，各行(列)が処理され，その後，各列(行)が処理される．
その結果，**複素数値 F(u,v)の 2 次元行列が得られる．**

⇒**(u,v)は(x,y)方向の周波数変数**である．

複素数値 F(u,v) の実数部 R(u,v) と虚数部 I(u,v) は，振幅が $|F(u,v)|$，位相が $\theta_{(u,v)}[= \tan^{-1}\{I(u,v)/R(u,v)\}]$ の正弦波を，位相が0の余弦波と正弦波に分割したときの，それぞれの振幅を表している．物理的には，画像に含まれる周波数成分(u,v)における正弦波の振幅と位相が F(u,v)の絶対値と偏角で与えられていることを意味している．

【 一次元フーリエ変換 】

x方向のフーリエ変換

$$F\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$ ：複素数

$$F(u) = R(u) + jI(u) = |F(u)| e^{j\phi(u)}$$

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$ ：$f(x)$ のフーリエスペクトル

$$\phi(u) = \tan^{-1}[I(u)/R(u)]$$ ：位相

$|F(u)|^2$ ：$f(x)$ のパワースペクトル

F(u) ⇒ f(x) フーリエ逆変換は

$$F^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$ ：実数

【 二次元フーリエ変換 】

x, y 方向でのフーリエ変換：面積積分

$$F\{f(x,y)\} = F(u,v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dxdy$$

$$F^{-1}\{F(u,v)\} = f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{j2\pi(ux+vy)} dudv$$