Vector operation

$\phi, \quad \delta, \quad \varphi, \quad : \quad scalar$

$A, \quad B, \quad C, \quad : \quad vector$

$n \quad : \quad nomal\ vector$ （法線）

l ： 長さ　　S ： 面積　　V ：体積

1． Vector operations

nabla： $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$

Laplacian： $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

2． Basic definitions （基本約束）

(1) grad（勾配）

$$\nabla\phi = grad\phi = i\frac{\partial\phi}{\partial x} + j\frac{\partial\phi}{\partial y} + k\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$gradf = \nabla f = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \left(\lim_{h1\to 0}\frac{f(x+h1,y)-f(x,y)}{h1}, \lim_{h2\to 0}\frac{f(x,y+h2)-f(x,y)}{h2}\right)$$

(2) div（発散）

$$\nabla\cdot A = divA = \frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z}$$

(3) rot（回転）

$$\nabla\times A = rotA = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Ax & Ay & Az \end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial Az}{\partial y} - \frac{\partial Ay}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial Ax}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial Ay}{\partial x} - \frac{\partial Ax}{\partial y}\right)$$

特徴抽出フィルタ

濃度差のエッジ検出 ： 画像の微分 ⇒ 一次微分 (勾配：gradient)

微分 (差分) の定義

$$\frac{\partial f[y][x]}{\partial x} = \Delta_x f = f[y][x+1] - f[y][x]$$
$$\frac{\partial f[y][x]}{\partial y} = \Delta_y f = f[y+1][x] - f[y][x]$$

対称性を考慮して

$$\Delta_x f = f[y][x+1] - f[y][x-1]$$
$$\Delta_y f = f[y+1][x] - f[y-1][x]$$

$\Delta_x f = f[y][x+1] - f[y][x-1]$ ⇒ **縦方向のエッジだけ検出**

$\Delta_y f = f[y+1][x] - f[y-1][x]$ ⇒ **横方向のエッジだけ検出**

$$\sqrt{(\Delta_x f)^2 + (\Delta_y f)^2}$$

簡易版 $= |\Delta_x f| + |\Delta_y f|$ ⇒ **エッジの方向に依存しない勾配の大きさを計算**

$\tan^{-1} \frac{\Delta_y f}{\Delta_x f}$ ⇒ **勾配の方向**

ヤコビ行列 Jacobian Matrix・ヤコビアン (ヤコビ行列式・関数行列式 functional determinant)

定義 2 変数関数 $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$の勾配ベクトル grad $f_1 = \nabla f_1$、grad $f_2 = \nabla f_2$ を、縦に並べた以下の行列をヤコビ行列と呼ぶ。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

定義 ヤコビ行列の行列式

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}$$

を、関数行列式ないしは**ヤコビアン**と呼び、簡略化して表す場合には、

記号 J(x,y)， $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)}$ などを用いる。

ヘッセ行列·ヘッシアン Hessian (ヘッセ行列式)

定義　2変数関数 $f(x,y)$の第二次偏導関数を、以下のように並べた行列をヘッセ行列と呼ぶ。

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

この行列式

$$D = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right)^2$$

を、ヘッシアンと呼ぶ。

ラプラスの演算子 (ラプラシアン Laplacian) 記法: Δf

定義　2変数関数 $f(x,y)$の x, yそれぞれに関する第二次偏導関数の和。

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

発散(divergence)　記法: divA

3. 積分公式

(1)　Gauss's theorm

$$\int_S A \cdot n\, ds = \int_S An\, ds = \int_V (V \cdot A)\, dV = \int_V divA\, dV$$

(2)　Stoke's theorm

$$\int_S (rotA) \cdot n\, ds = \int_S (V \times A) n\, ds = \oint_C A \cdot dL$$

(3)　Geen's theorm

$$\int_S \phi(grad\varphi) \cdot n\, ds = \int_S (V \times A) n\, ds = \oint_C A \cdot dL$$