あなたは、MRI の緩和式がなぜこのようになるか説明できますか？

縦緩和式：$M_z = M_0(1-e^{-\frac{t}{T_1}})$　　**横緩和式**：$M_x = M_0 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$

MRI の緩和式

MRI の信号強度（合成ベクトルの大きさ）は X 線や γ 線の減衰と同じく、時間の経過とともに減衰していく。組織による減衰の仕方の違いを比例定数 λ で表せば次式のようになる。

$$-\frac{dM}{dt} = \lambda M$$
$$-\frac{dM}{dt}dt = \lambda M\, dt$$
$$-dM = \lambda M\, dt$$
$$\frac{dM}{M} = -\lambda\, dt$$

ここで両辺を積分して

$$\int \frac{1}{M} dM = -\lambda \int dt$$
$$\log_e M = -\lambda t + C$$
$$M = e^{-\lambda t + C} = e^{-\lambda t} \cdot e^C$$

ここで初期条件、t＝0　のときは　M　＝M₀　となるので、

$M = e^{-\lambda t} \cdot e^C$　**の式の　<u>t に 0 を代入</u>すると**

$$M = e^{-\lambda 0} \cdot e^C = e^0 \cdot e^C = 1 \cdot e^C = e^C = M_0$$

となり、

$$M = e^C = M_0 \quad \Rightarrow \quad \therefore e^C = M_0$$

となる。

よって、MRI の横緩和（横緩和エネルギー）の式

$$M = M_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

が導かれる。

MRI“Bloch の方程式”より T_1 値，T_2 値を考える．

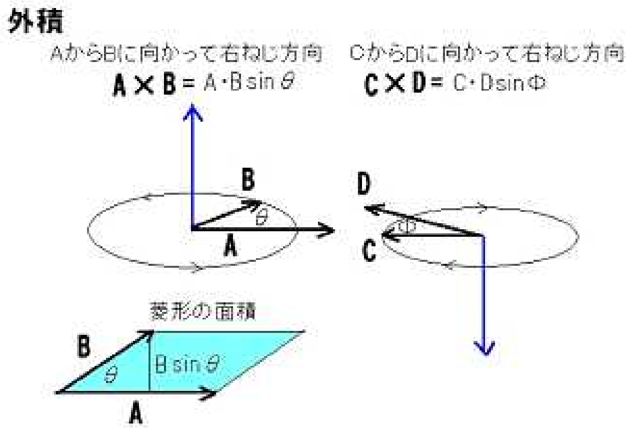
・磁場の中での巨視的磁化の運動は“現象微分方程式”で説明される．

静磁場 H_0 の中の置かれた磁気モーメントの運動方程式

$$\frac{dP}{dt} = \mu \times H_0 \quad \cdots① \quad \mu \times H_0 \text{：ベクトル積(外積)}$$

P：磁気モーメント μ を持った原子核の角運動量

H_0：静磁場強度



自転している原子核の角運動量 P の速度変化は，静磁場によって磁気モーメントに及ぼされるトルク $\mu \times H_0$ に依存する．

① の両辺に γ を乗じ　μ＝γP　より

$$\frac{dP}{dt}\gamma = \gamma(\mu \times H_0) \quad \cdots②$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \gamma(\mu \times H_0) \quad \cdots③$$

となる．

・スピン(自転)と角運動量 P

水素原子核は＋eの電荷を持ちスピン(自転)している．電荷が回転すれば逆向きの電流が流れ磁場が発生する．

磁気モーメントμと角運動量Pの関係は

μ＝γP …④ γ：原子の種類により異なる“磁気回転比”

ここで③式

$$\frac{d\mu}{dt}=\gamma\frac{dP}{dt}=\gamma(\mu\times H_0) \quad \cdots⑤$$

は，「角運動量Pの速度変化は，静磁場によって磁気モーメントに及ぼされるトルク $\mu\times H_0$ に依存する」ことを示している．

そこで，巨視的磁化ベクトルをMとすれば

$$\frac{dM}{dt}=\gamma(M\times H_0) \quad \cdots⑥$$

で表される．

ＲＦ磁場を受けた“巨視的磁化ベクトルM”の振る舞いはベクトル積を展開すれば

$$M\times H=\begin{vmatrix} M_x & H_x & i \\ M_y & H_y & j \\ M_z & H_z & k \end{vmatrix}=(M_yH_z-M_zH_y)i+(M_zH_x-M_xH_z)\,j+(M_xH_y-M_yH_x)k$$

…⑦

H は静磁場H_0とＲＦ磁場の磁化ベクトルH_1(xy面での ω の角速度で回転)の両方から成り立ち，各成分は

$$H_x=H_1\cos\omega t$$
$$H_y=-H_1\sin\omega t$$
$$H_z=H_0$$

となる．この各成分を(***M*** ×***H***)の展開式⑦の代入し

$$\begin{aligned}M\times H&=(M_yH_0+M_zH_1\sin\omega t)i+(M_zH_1\cos\omega t-M_xH_0)\,j\\&\quad+(-M_xH_1\sin\omega t+M_yH_1\cos\omega t)k\end{aligned} \quad \cdots⑧$$

⑧式を⑥式の代入し

$$
\begin{aligned}
\frac{dM}{dt} &= \gamma(M \times H) \\
&= \gamma(M_y H_0 + M_Z H_1 \sin \omega t) i \\
&\quad + \gamma(M_z H_1 \cos \omega t - M_x H_0) j \\
&\quad\quad + \gamma(-M_x H_1 \sin \omega t + M_y H_1 \cos \omega t) k
\end{aligned}
$$

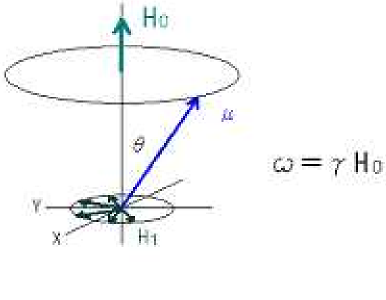
これらを組み合わせると，Mの3つの時間依存性を表す方程式が得られる．

$$
\begin{aligned}
\frac{dM_x}{dt} &= \gamma(M_y H_0 + M_z H_1 \sin \omega t) i \\
\frac{dM_y}{dt} &= \gamma(M_z H_1 \cos \omega t - M_x H_0) j \\
\frac{dM_z}{dt} &= -\gamma(M_x H_1 \sin \omega t - M_y H_1 \cos \omega t) k
\end{aligned}
$$

Bloch は“スピン－格子緩和，スピン－スピン緩和が，それぞれ T_1, T_2 なると特性時間を持った1次の過程で捉える”と仮定．すなわち M_x, M_y は零に，M_z は平衡値(初期値)M_0 に向かって戻ってゆく緩和の過程式を考えた．したがって Bloch の方程式は最終的には

$$
\begin{aligned}
\frac{dM_x}{dt} &= \gamma(M_y H_0 + M_z H_1 \sin \omega t) - \frac{M_x}{T_2} \\
\frac{dM_y}{dt} &= \gamma(M_z H_1 \cos \omega t - M_x H_0) - \frac{M_y}{T_2} \\
\frac{dM_z}{dt} &= -\gamma(M_x H_1 \sin \omega t - M_y H_1 \cos \omega t) - \frac{M_z - M_0}{T_1}
\end{aligned}
$$

となる．



縦緩和：T1

定量的に Mz の減衰は Mx=My=0 とおいて，初期条件は t=0 のとき Mz=0 とすれば

$$\frac{dM_z}{dt} = -\frac{M_z - M_0}{T_1}$$

変数を分離して

$$\frac{dM_z}{M_z - M_0} = -\frac{dt}{T_1} \qquad \frac{1}{M_z - M_0} dM_z = -\frac{1}{T_1} dt$$

両辺を積分して

$$\int \frac{1}{M_z - M_0} dM_z = -\int \frac{1}{T_1} dt$$

$$\log(M_z - M_0) = -\frac{t}{T_1} + C$$

$$(M_z - M_0) = e^{(-\frac{t}{T_1} + C)}$$

$$M_z = M_0 + e^{-\frac{t}{T_1} + C} = M_0 + e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot e^C$$

初期条件「t=0 のとき Mz=0」を入れて

$$0 = M_0 + e^C \quad \therefore e^C = -M_0$$

$$M_z = M_0 - e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot M_0 = M_0(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

$$\therefore \quad M_z = M_0(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

横緩和：T2

Bloch の方程式より，励起直後　t=0 のとき Mx=M0

$$\frac{dM_x}{dt} = -\frac{M_x}{T_2}$$

変数を分離して

$$\frac{dM_x}{M_x} = -\frac{dt}{T_2}$$

両辺を積分して

$$\int \frac{1}{M_x} dM_x = -\int \frac{1}{T_2} dt$$

$$\log M_x = -\frac{t}{T_2} + C$$

$$M_x = e^{-\frac{t}{T_2}+C} = e^{-\frac{t}{T_2}} \cdot e^C$$

初期条件 t=0 のとき Mx=M0 より

$$M_0 = e^C$$

$$M_x = M_0 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$$

$$\therefore \quad M_x = M_0 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$$